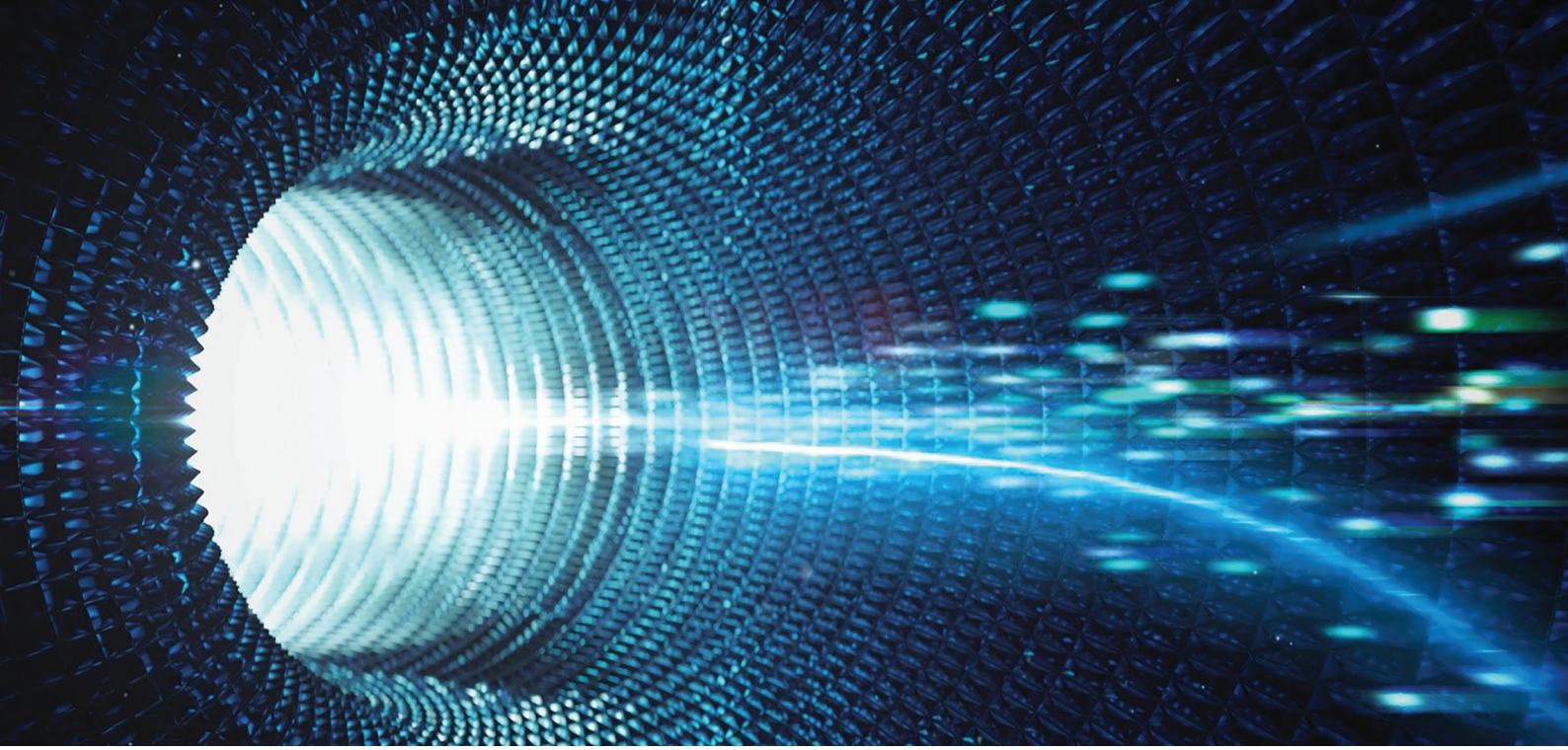


مقاله علمی- ترویجی

مروری بر روش‌های ریاضی سنتز منطقی مدارهای کوانتومی

آرزو رجایی، گروه مهندسی کامپیوتر، واحد مشهد، دانشگاه آزاد اسلامی، مشهد، ایران، rajaei@mshdiau.ac.ir

محبوبه هوشمند*، گروه مهندسی کامپیوتر، واحد مشهد، دانشگاه آزاد اسلامی، مشهد، ایران، houshmand@mshdiau.ac.ir

سید عابد حسینی، گروه مهندسی برق، واحد مشهد، دانشگاه آزاد اسلامی، مشهد، ایران، hosseyni@mshdiau.ac.ir

*نویسنده مسئول

چکیده

محاسبات کوانتومی یک روش جدید پردازش اطلاعات و حاصل ترکیب مکانیک کوانتومی، علوم کامپیوتر و نظریه اطلاعات کلاسیک است. یک گیت کوانتومی به‌صورت ریاضی با یک ماتریس یکانی نمایش داده می‌شود. سنتز منطقی مدارهای کوانتومی به فرایند تبدیل یک گیت کوانتومی به یک سری گیت‌های پایه قابل پیاده‌سازی در فناوری‌های کوانتومی گفته می‌شود و به دو دسته کلی مبتنی بر تجزیه و ترکیب تقسیم می‌گردد. در روش‌های دسته نخست با بهره‌گیری از روش‌های تجزیه ماتریسی و در روش دوم با استفاده از ضرب ماتریسی گیت‌ها، مدارهای کوانتومی سنتز می‌شوند. این مطالعه به دسته نخست می‌پردازد که از الگوریتم‌های ریاضی برای دستیابی به مشخصه نهایی مدار کوانتومی بهره گرفته می‌شود.

کلمات کلیدی: روش‌های ریاضی، سنتز مدارای کوانتومی، محاسبات کوانتومی، سنتز تحمل‌پذیر اشکال

A Review on Mathematical Approaches to Quantum Circuit Synthesis

Arezoo Rajaei, Department of Computer Engineering, Mashhad Branch, Islamic Azad University, Mashhad, Iran, rajaei@mshdiau.ac.ir

Mahboobeh Houshmand*, Department of Computer Engineering, Mashhad Branch, Islamic Azad University, Mashhad, Iran, houshmand@mshdiau.ac.ir

Seyyed Abed Hosseini, Department of Electrical Engineering, Mashhad Branch, Islamic Azad University, Mashhad, Iran, hosseyni@mshdiau.ac.ir

*Corresponding Author

Abstract

Quantum computing is a new method of information processing based on the concepts of quantum mechanics which leads to strange and powerful events in the field of quantum. Each unitary matrix represents a quantum gate. Synthesis of quantum circuits refers to the process of converting a quantum gate into a series of basic gates implementable in quantum technologies and is divided into two general categories, namely decomposition and composition-based. In the first category, quantum circuits are synthesized by using matrix decomposition methods and in the second category, they are synthesized by using matrix multiplication of gates. This study deals with the first category, which uses mathematical algorithms to achieve the final characteristic of a quantum circuit.

Keywords: Mathematical approaches, Synthesis of quantum circuits, Quantum computing, Fault-tolerant synthesis

[Downloaded from kiaeee.ir on 2026-11-16]

۱- مقدمه

در طول چند دهه‌ی گذشته با پیشرفت شگفت‌انگیز فناوری، روند کوچک‌سازی ترانزیستورها در ساخت تراشه‌های کامپیوتری پدیدار شده است، به‌گونه‌ای که امروزه ریزپردازنده‌ها دربرگیرنده‌ی بیش از صدها میلیون ترانزیستور هستند. قانون مور بیان می‌کند که در هر ۱۸ماه تا دو سال تعداد ترانزیستورهای یک تراشه‌ی الکترونیکی دو برابر می‌شود [۱]. پیروی از قانون مور سبب می‌شود که اندازه‌ی ترانزیستورها درنهایت به اندازه‌ی اتم باشد. در چنین ابعادی قوانین کوانتومی بر ساخت تراشه‌ها حاکم خواهد شد، نه قوانین کلاسیک موجود در طراحی و ساخت تراشه‌های امروزی. بدین منظور، دانشمندان نظریه‌ی جدیدی تحت عنوان محاسبات کوانتومی بیان نمودند که در مقیاس بسیار کوچک، قوانین موردنظر، قوانین مربوط به مکانیک کوانتومی هستند [۲]. محاسبات و فناوری اطلاعات کوانتومی علم پردازش اطلاعات توسط سیستم‌های مکانیک کوانتوم است. این عرصه از علم در حقیقت شامل سه علم نظریه‌ی اطلاعات، علوم کامپیوتر و فیزیک کوانتوم است [۲-۴].

هر ماتریس یکانی نمایش دهنده ریاضی یک گیت کوانتومی است. سنتز مدارهای کوانتومی به فرایند تبدیل یک گیت کوانتومی به یک سری گیت‌های پایه اطلاق می‌شود. مسئله سنتز و بهینه‌سازی مدارهای کوانتومی یک مسئله سخت است [۵]. سنتز مدارهای کوانتومی به دو دسته کلی مبتنی بر تجزیه و ترکیب تقسیم می‌گردد. در روش‌های دسته اول با بهره‌گیری از روش‌های تجزیه ماتریسی مدارهای کوانتومی سنتز می‌شوند. در روش‌های دسته دوم با استفاده از روش‌های جستجو (به خصوص الگوریتم‌های تکاملی) اقدام به یافتن مداری متشکل از کتابخانه گیت‌های موردنظر می‌شود که مقاله مروری [۶] به بررسی این روش‌ها می‌پردازد.

ساختار ادامه این نوشته از این قرار است. در بخش ۲، پیش‌زمینه‌های موردنیاز در رابطه با محاسبات کوانتومی بیان‌شده‌اند. در بخش ۳ کارهای مرتبط در زمینه سنتز مدارهای کوانتومی با استفاده از الگوریتم‌های مبتنی بر ریاضی بررسی‌شده‌اند. بخش ۴ به جمع‌بندی و پیشنهادهایی برای کارهای آتی می‌پردازد.

۲- پیش زمینه

۲-۱-تاریخچه محاسبات کوانتومی

محاسبات کوانتومی شاخه جدیدی از پردازش اطلاعات بر مبنای اصول مکانیک کوانتومی است. هرچند هنوز کامپیوترهای کوانتومی کاملاً عملی، ساخته نشده‌اند، اما آینده کامپیوترهای کوانتومی بسیار روشن به نظر میرسد.

برای اولین بار در دهه ۱۹۷۰ و اوایل دهه ۱۹۸۰، متخصصین فیزیک و کامپیوتر از قبیل چارلز بنت[۱]، پل بنیوف[۲]، دیوید دویچ[۳] و ریچارد فاینمن[۴] ایده دستگاه محاسباتی بر مبنای مکانیک کوانتومی به دلیل مواجه شدن با محدودیت‌های اساسی محاسبات را مطرح کردند. آن‌ها متوجه شدند که اگر فنّاوری طبق قانون مور[۵] به جلو رود، اندازه عناصر مداری که بر روی تراشه‌های سیلیکونی تعبیه می‌شود، عاقبت بیشتر از چند اتم نخواهد بود. مشکلی که در اینجا پیش می‌آید این است که در اندازه اتمی، قوانین مکانیک کوانتومی بر رفتار اتم‌ها حاکم هستند، نه قوانین مکانیک کلاسیک.

در سال ۱۹۸۲، فاینمن [۷]، جزو اولین افرادی بود که مدلی انتزاعی را پیشنهاد داد که نشان می‌داد چگونه یک سیستم کوانتومی می‌تواند محاسبات را انجام دهد. سپس در سال ۱۹۸۵، دوستچ [۸]، یک مقاله‌ای را منتشر کرد که به‌صورت نظری نشان می‌داد هر فرآیند فیزیکی را می‌توان به‌طور کامل با یک کامپیوتر کوانتومی مدل کرد.

در سال ۱۹۹۴،شور[۶] با کمک کامپیوترهای کوانتومی توانست روشی را برای شکستن یک مسئله مهم در نظریه اعداد- تجزیه اعداد به عوامل اول [۷] تا [۸] پیدا کند. به‌علاوه او نشان داد که مجموعه‌ای از اعمال ریاضی که برای کامپیوتر کوانتومی طراحی‌شده‌اند، قابلیت تجزیه اعداد بزرگ را بر روی کامپیوترهای کوانتومی، بسیار سریع‌تر از کامپیوترهای کلاسیک دارند. در نتیجه کشف این روش و الگوریتم جستجوی گراور [۹]، باعث شد دانشمندان زیادی به حوزه محاسبات کوانتومی علاقه‌مند شوند.

۲-۲- اصول محاسبات کوانتومی

در این بخش، اصول محاسبات کوانتومی و تعریف‌های ریاضی مربوطه موردبررسی قرار می‌گیرند.

۲-۲-۱- کیوبیت‌ها

حالات کوانتومی را می‌توان برحسب بردارها و یا با نماد معروف‌تر برا/کت[۷] نمایش داد. کت‌ها همانند $|x>$ نمایشگر بردارهای ستونی هستند و عموماً برای توصیف حالات کوانتومی به کار می‌روند. حالت برا $<x|$ نمایشگر ترانهاده مزدوج[۸] $|x>$ است. حالات پایه $|0>$ و $|1>$ را می‌توان به‌صورت $(1,0)^T$ و $(0,1)^T$ بیان کرد. هر ترکیبی از $|0>$ و $|1>$، $\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$ را می‌توان به‌صورت $(\alpha,\beta)^T \in C^2$ نشان داد. $\langle x|y\rangle$ نمایشگر ضرب داخلی[۹] دو بردار است. برای نمونه چون $|0>$ و $|1>$ عمود هستند داریم: $\langle 0|1\rangle = 0$. نماد $|x\rangle\langle y|$ نشان‌دهنده ضرب خارجی[۱۰] دو بردار است.

یک کیوبیت[۱۱]، یک بردار یکه، در فضای دو بعدی مختلط است که برای این فضا بردارهای پایه مشخص که با نماد $|0>$ و $|1>$ نمایش داده می‌شوند انتخاب‌شده‌اند. بردارهای پایه $|0>$ و $|1>$ به ترتیب همتای کوانتومی بیت‌های کلاسیک ۰ و ۱ می‌باشند. برخلاف بیت‌های کلاسیک، کیوبیت‌ها می‌توانند در هر برهم نهی[۱۲] از $|0>$ و $|1>$ همانند $\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$ قرار بگیرند که α و β اعداد مختلطی هستند که

$$|\alpha|^2+|\beta|^2=1.$$

۲-۲-۲- گیت‌های کوانتومی

اعمال کوانتومی را می‌توان با شبکه‌ای از گیت‌ها محقق کرد. نمایش ریاضی هر گیت کوانتومی، یک تبدیل خطی است که با یک ماتریس یکانی[۱۳] مؤثر بر روی فضای n کیوبیتی تعریف می‌گردد. ماتریس U یکانی است اگر $UU^+=I$ که U^+، ترانهاده مزدوج ماتریس U می‌باشد. ماتریس یکانی عمومی که بر روی n کیوبیت عمل می‌کند، با نماد $U(2^n)$ نمایش داده می‌شود. چون هر عمل یکانی، معکوس‌پذیر است، هر گیت کوانتومی نیز معکوس‌پذیر است. بنابراین اگر خروجی‌های یک گیت کوانتومی را داشته باشیم، می‌توان ورودی‌های متناظر با آن را به‌دست آورد.

از معروف‌ترین گیت‌های تک‌کیوبیتی، اعضای مجموعه پائولی[۱۴] $P=\{I,X,Y,Z\}$ می‌باشد که از چهار عملگر زیر تشکیل شده است:

$$I\equiv\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, X\equiv\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}, Y\equiv\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}, Z\equiv\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$$

I تبدیل همانی[۱۵]، X گیت چرخش بیت[۱۶]، Z گیت چرخش فاز[۱۷] و Y ترکیبی از هر دو است. اثر این تبدیلات بر روی حالات پایه $|0>$ و $|1>$ به‌صورت زیر است.

$$X:|0\rangle\to|1\rangle,|1\rangle\to|0\rangle$$
$$Y:|0\rangle\to i|1\rangle,|1\rangle\to -i|0\rangle$$
$$Z:|0\rangle\to|1\rangle,|1\rangle\to -|1\rangle$$

[Downloaded from kiaeee.ir on 2026-11-16]

این ماتریس‌ها، یکانی و هرمیتی هستند. از دیگر گیت‌های پرکاربرد تک‌کیوبیتی دیگر، گیت‌های دوران به دور محورهای x ،y و z با زاویه α هستند که به ترتیب با ماتریس‌های زیر نمایش داده می‌شوند:

$$R_x(\alpha)=\begin{bmatrix}\cos\frac{\alpha}{2} & i\sin\frac{\alpha}{2}\\ i\sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2}\end{bmatrix}$$

$$R_y(\alpha)=\begin{bmatrix}\cos\frac{\alpha}{2} & -\sin\frac{\alpha}{2}\\ \sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2}\end{bmatrix}$$

$$R_z(\alpha)=\begin{bmatrix}e^{-i\frac{\alpha}{2}} & 0\\ 0 & e^{i\frac{\alpha}{2}}\end{bmatrix}$$

ازجمله گیت‌های تک‌کیوبیتی پرکاربرد دیگر، گیت‌های هادامارد[18] (H)، گیت فاز[19] (P) و گیت T است. ماتریس‌های مربوط به این گیت‌ها در ادامه آورده شده است.

$$H=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix},$$

$$P=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{\frac{i\pi}{2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & i\end{bmatrix},\quad P^{\dagger}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{\frac{-i\pi}{2}}\end{bmatrix}$$

$$T=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{\frac{i\pi}{4}}\end{bmatrix},\quad T^{\dagger}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{\frac{-i\pi}{4}}\end{bmatrix}$$

اگر U، یک گیت تک‌کیوبیتی، با نمایش ماتریسی

$$U=\begin{bmatrix}u_{00} & u_{01}\\ u_{10} & u_{11}\end{bmatrix}$$

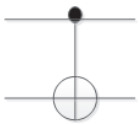
باشد، آنگاه، گیت U کنترلی[20]، گیتی است که بر دو کیوبیت اثر می‌کند به‌طوری‌که کیوبیت اول، کیوبیت کنترل و کیوبیت دوم، کیوبیت هدف است. اگر کیوبیت کنترلی برابر $|1>$ باشد، گیت یکانی U بر روی کیوبیت هدف اعمال می‌شود و اگر کیوبیت کنترل، $|0>$ باشد، کیوبیت هدف بدون تغییر باقی می‌ماند. نمایش ماتریسی این گیت به‌صورت زیر است:

$$Controlled-U\equiv\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & u_{00} & u_{01}\\ 0 & 0 & u_{10} & u_{11}\end{bmatrix}$$

گیت معکوس کننده-کنترلی[21]، CNOT، یک گیت دوکیوبیتی است. کیوبیت اول، در نقش کنترل و کیوبیت دوم در نقش هدف است. اگر کیوبیت کنترل، $|1>$باشد، CNOT، کیوبیت هدف را معکوس می‌کند و اگر کیوبیت کنترل، $|0>$باشد، کیوبیت هدف بدون تغییر خارج می‌شود. به عبارت دیگر، خروجی دوم، XOR کیوبیت کنترل و هدف می‌باشد. نمایش مداری گیت CNOT به‌صورت زیر است:

$$CNOT\equiv\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

شکل (۱) نمایش مداری گیت CNOT را نشان می‌دهد.



شکل ۱: نمایش مداری گیت CNOT

گیت‌های $C^{K}U$، بر روی k کیوبیت کنترل و یک کیوبیت هدف عمل می‌کنند. وقتی‌که تمام k کیوبیت کنترل در حالت $|1>$ باشند، گیت U به کیوبیت هدف اعمال می‌شود.

یک ماتریس مربعی، قطری نامیده می‌شود چنانچه درایه‌های خارج از قطر اصلی آن صفر باشند. یک گیت قطری که بر روی n کیوبیت اعمال می‌شود یک ماتریس یکانی $2^{n}*2^{n}$ قطری دارد و با نماد Δ_n نمایش داده می‌شود. یک ماتریس مربعی می‌تواند به ماتریس‌های مربعی کوچک‌تری با اندازه‌های مساوی تقسیم شود که بلوک خوانده می‌شوند. اگر بلوک‌های خارج از قطر اصلی صفر باشند، ماتریس قطری بلوکی خوانده می‌شود.

یک مالتی‌پلکسر کوانتومی [۱۰]، m کیوبیت هدف و $s=n-m$ کیوبیت انتخاب دارد و 2^{s} ترکیب مختلف خطوط انتخاب مشخص می‌کنند که چه گیت کوانتومی متفاوتی به خطوط هدف اعمال شود. این مجموعه گیت‌ها، در [۱۱] با عنوان گیت‌های به‌طور یکنواخت کنترلی چندکیوبیتی[22] نامیده و به‌صورت $F_{\tau}^{s}\left(U\left(2^{m}\right)\right)$ نمایش داده می‌شوند که در آن مجموعه τ کیوبیت‌های هدف را مشخص می‌کند. در حالتی که کیوبیت‌های انتخاب باارزش‌ترین کیوبیت‌ها باشند، مالتی‌پلکسرهای کوانتومی یک نمایش قطری بلوکی همانند رابطه (۱) دارند که در آنها $0\le i\le 2^{n-m}-1, U_i\left(2^{m}\right)$، بلوک‌های روی قطر اصلی هستند و هر $U_i\left(2^{m}\right)$ یک ماتریس یکانی $2^{m}*2^{m}$ است.

$$U\left(2^{n}\right)=\begin{bmatrix}U_0\left(2^{m}\right) & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & U_{2^{n-m}-1}\left(2^{m}\right)\end{bmatrix} \qquad (۱)$$

یک خط انتخاب در یک مالتی‌پلکسر کوانتومی همان‌گونه که در [۱۰] استفاده شده است، با □ نمایش داده می‌شود. اگر تنها یک خط انتخاب داشته باشیم، رابطه (۱) به شکل رابطه (۲) در خواهد آمد که در این صورت ماتریس $U(2^{m})$ را با نماد $U\left(2^{n}\right)=U_0\left(2^{n-1}\right)\oplus U_1\left(2^{n-1}\right)$ نمایش می‌دهیم. اگر کیوبیت اول در حالت $|0>$ باشد، بر روی کیوبیت دوم U_0، و اگر در حالت $|1>$ باشد، بر روی کیوبیت دوم U_1 اعمال می‌شود.

$$U=\begin{bmatrix}U_0 & 0\\ 0 & U_1\end{bmatrix} \qquad (۲)$$

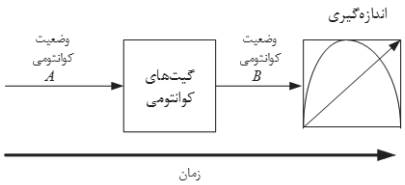
در حالتی که تنها یک کیوبیت هدف (با نام t) داریم و گیت‌های کوانتومی اعمال شده در خط هدف t، R_p $\left(p\in\{x,y,z\}\right)$ باشند، مالتی‌پلکسر کوانتومی، R_p مالتی‌پلکس شده نامیده می‌شود.

۲-۲-۳- مدارهای کوانتومی

یکی از مدل‌های محاسبات کوانتومی، مدل مداری از گیت‌های کوانتومی است. در این مدل، محاسبات کوانتومی با مدارهای کوانتومی نمایش داده می‌شوند. یک مدار کوانتومی، از مجموعه‌ای از سیم‌های افقی (کیوبیت‌ها) و یک توالی از گیت‌های کوانتومی تشکیل می‌گردد. در این مدل، یک ثبات کوانتومی در یک وضعیت تعریف شده اولیه قرار می‌گیرد. وضعیت آن با یک سری اعمال یکانی (گیت‌ها) بر روی وضعیت اولیه تغییر می‌کند تا به یک وضعیت نهایی برسیم. سپس

[Downloaded from kiaeee.ir on 2026-11-16]

وضعیت نهایی در پایه‌های محاسباتی اندازه‌گیری می‌شود. یک مدار کوانتومی همواره از چپ به راست ارزیابی می‌شود؛ بنابراین حرکت از چپ به راست در یک مدار کوانتومی به معنای حرکت به جلو در زمان است [۱۲]. محاسبات کوانتومی که با مدارهای کوانتومی مدل شده، در شکل (۲) نشان داده شده است.



شکل ۲:محاسبات کوانتومی که با مدارهای کوانتومی مدل شده است.[۲۱]

مدارهای کوانتومی تفاوت بسیاری با مدارهای کلاسیک دارند از جمله:

- مدارهای کوانتومی فاقد هرگونه دور[۲۳] و گنجایش خروجی[۲۴] هستند.
- در مدارهای کوانتومی، تعداد کیوبیت‌های ورودی با تعداد کیوبیت‌های خروجی همیشه یکسان بوده و پیش از عمل اندازه‌گیری، می‌توان از حالت خروجی به حالت ورودی دست یافت.

۲-۲-۴- انواع کتابخانه‌های گیت‌های کوانتومی

چندین کتابخانه از گیت‌های کوانتومی برای سنتز مدارهای کوانتومی معرفی شده‌اند که معروف‌ترین آنها عبارتند:

- کتابخانه گیت‌های پایه‌ای که از گیت‌های CNOT و کلیه گیت‌های کوانتومی تک‌کیوبیتی تشکیل شده است.
- کتابخانه گیت‌های ابتدایی که از گیت‌های CNOT و گیت‌های دوران تک‌کیوبیتی تشکیل شده است.
- کتابخانه کلیفورد +T[۲۵] (CTL) که از گیت‌های CNOT، H، P و T تشکیل شده است. این کتابخانه یک کتابخانه‌ی تقریباً جهانی هست.

۲-۲-۵- معیارهای ارزیابی مدار کوانتومی

- **تعداد گیت‌های تک کیوبیتی و CNOT**: تعداد گیت‌هایی که برای سنتز منطقی مورداستفاده قرار میگیرند، معیاری برای ارزیابی روش‌های سنتز منطقی است. به‌طورکلی بر اساس کتابخانه‌های تعریف‌شده، در مدارهای کوانتومی این هزینه شامل گیت‌های تک‌کیوبیتی و گیت CNOT تولید شده است.
- **هزینه‌ی کل گیت‌ها:** این معیار برابر با تعداد کل گیت‌های تولیدشده در روش سنتز منطقی مدارهای کوانتومی است.
- **عمق مدار**: گیت‌های پایه‌ای که در یک مدار کوانتومی می‌توانند باهم اجرا شوند به‌عنوان یک سطح منطقی[۲۶] در نظر گرفته می‌شوند [۱۳]. تعداد سطوح منطقی یک مدار، عمق منطقی مدار[۲۷] نامیده می‌شود. عمق یک مدار کوانتومی C، نشان داده‌شده با D_C، می‌تواند از رابطه (۳) به دست آید که در آن، T_C تعداد کل گیت‌ها و P_C تعداد گیت‌هایی در مدار C که موازی هستند را نشان می‌دهد.

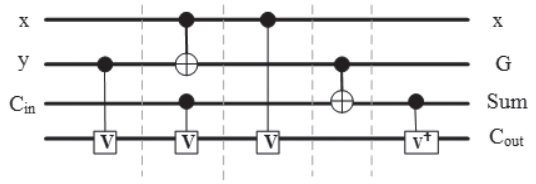
$$D_c = T_c - P_c \qquad (۳)$$

- **هزینه نزدیک‌ترین همسایه (NNC):** یک گیت دو کیوبیتی کوانتومی نظیر g را در نظر بگیرید که در آن کیوبیت کنترل و کیوبیت هدف به ترتیب بر روی خط cام و خط t ام مدار قرار گرفته است $(0 \le c,t < n)$. در این صورت NNC[۲۸] برای این گیت به‌صورت تعریف می‌شود (فاصلهٔ بین کیوبیت‌های کنترل و هدف). بر این اساس، NNC برای یک مدار به‌صورت حاصل جمع NNC گیت‌ها خواهد بود.
- **تعداد گیت T**[۲۸]: تعداد کل گیت‌های T استفاده‌شده در مدار کوانتوم است.
- **عمق گیت T**[۲۹]: تعداد لایه‌های گیت T در مدار است، جایی که یک‌لایه شامل عملیات کوانتومی است که می‌تواند به‌طور هم‌زمان انجام شود.
- **تعداد کیوبیت(خطوط) کمکی**[۳۰]: خطوط کمکی، خطوطی هستند علاوه بر ورودی و خروجی اصلی تابع موردنظر به مدار اضافه می‌شوند و بر مبنای کاربرد به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱-دسته نخست حالتی است که کیوبیت‌های کمکی به مدار اضافه می‌شوند تا یک تابع معکوس‌ناپذیر را به یک تابع معکوس‌پذیر تبدیل کنند. در این حالت می‌توان حداقل و حداکثری برای مقدار کیوبیت‌های کمکی موردنیاز برای معکوس کردن مدار، در نظر گرفت.

۲- دسته دوم حالتی است که مدار موردنظر معکوس‌پذیر است؛ به عبارت دیگر با همان تعداد ورودی(خروجی) می‌توان مدار را سنتز کرد؛ اما کیوبیت‌های کمکی به دلایل مختلفی چون کاهش هزینه کوانتومی[۱۴]، [۱۵] و کاهش عمق[۱۶] به مدار اضافه می‌شوند و در الگوریتم‌های سنتز[۱۳] و یا بهینه‌سازی از آن استفاده می‌شود.

مثال۱: در شکل(۳) یک مدار ساده ازنظر هزینه کوانتومی و نیز فشرده شده ازنظر عمق برای تمام جمع‌کننده نشان داده شده است[۱۷]. سطوح منطقی مدار با نقطه‌چین از یکدیگر جدا شده‌اند. هزینه کوانتومی این مدار برابر ۶ و عمق آن معادل ۴ است. به دلیل آنکه تعداد کیوبیت‌های درگیر در خط چهارم مدار برابر ۴ است، عمق ۴ در این مدار بهینه خواهد بود. NNC این مدار برابر عدد ۳ است. در این مدار یک کیوبیت کمکی برای معکوس‌پذیر کردن تابع استفاده شده است. تعداد خروجی اصلی این مدار ۲ است، بنابراین ۲ خروجی x و G به‌عنوان خروجی بدون استفاده در نظر گرفته می‌شوند.



شکل ۳:مدار ساده‌شده ازنظر هزینه با سطوح منطقی فشرده‌شده برای یک تمام جمع‌کننده[۷۱]

۲-۲-۶- مساله بهینه‌سازی چند هدفه

یک مساله بهینه‌سازی چندهدفه[۳۱] را می‌توان را به شکل زیر فرمول‌بندی کرد:

$$\begin{aligned} &Minimize \quad F(x) = \left(f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)\right) \\ &\quad with \quad x = \left(x_1, x_2, ..., x_m\right) \in X \\ &subject \ to \quad g(x) = \left(g_1(x), g_2(x), ..., g_k(x)\right) \le 0 \\ &\quad x_1 \in D_1, x_2 \in D_2, ..., x_n \in D_n \end{aligned}$$

که در آن x برداری از m متغیر است، X فضای تصمیم‌گیری است، هر مؤلفه از F(X)، یک تابع هدف[۳۲] است و g(X) برداری از k محدودیت[۳۳] است که یک ناحیه ممکن[۳۴] X_f را تعریف می‌کند. هر نقطه از $x \in X_f$، یک جواب ممکن[۳۵] است.

طبق این تعریف، یک مسئله بهینه‌سازی مقید دارای مجموعه‌ای از متغیرها $(x_1, x_2, ..., x_m)$ است که به‌عنوان متغیرهای بهینه‌سازی[۳۶] شناخته می‌شوند. تابعی F(t) با نام تابع هدف بر روی متغیرهای بهینه‌سازی اعمال می‌شود و این تابع بایستی کمینه گردد. همچنین، مجموعه‌ای از قیدها می‌توانند به‌صورت تساوی (=) و یا نامساوی (≤یا ≥)بر روی متغیرهای بهینه‌سازی اعمال شوند. مجموعه‌های $D_1, D_2, ..., D_n$ به‌ترتیب به‌عنوان

[Downloaded from kiaeee.ir on 2026-11-16]

دامنه‌های متغیرهای $x_1, x_2, \ldots, x_n$ هستند که می‌توانند به‌عنوان قیدهای دامنه‌ای (یا محدودیت) در مسئله بهینه‌سازی مقید بیان شوند. این نکته لازم است عنوان شود که محدودیت را می‌توان در برخی موارد به‌صورت قیدهای تساوی و یا نامساوی نیز بیان کرد. به‌عنوان مثال، محدودیت نامنفی بودن متغیر X_1 را می‌توان به‌صورت قید نامساوی $-x_n \le 0$ نوشت. در بهینه‌سازی چند هدفه، هدف بهینه‌سازی هم‌زمان بیشتر از یک تابع هدف مختلف و گاه متضاد است. یکی از روش‌های حل بهینه‌سازی چند هدفه، پیدا کردن مجموعه‌ی جواب بهینه پرتو است که در آن مجموعه جواب‌های غیرغالب در تمام فضای جستجو ارائه می‌شود. یک جواب غیرغالب خوانده می‌شود اگر مقدار هیچ یک از توابع هدف آن نتواند بدون خراب کردن برخی دیگر از توابع هدف بهتر شود.

۳- روش‌های سنتز منطقی مبتنی بر روابط ریاضی

حوزه محاسبات کوانتومی مدرن، با کشف توزیع کلید کوانتومی[۳۷][۱۸]، توانایی ارسال یک بیت کوانتومی به کمک دو بیت کلاسیک و یک بیت درهم تنیدگی (مخابره از راه دور کوانتومی[۱۹][۳۸]) و توانایی ارسال دو بیت کلاسیک با ارسال یک بیت کوانتومی و یک بیت درهم تنیدگی (کدگذاری چگال کوانتومی[۳۹] [۲۰]) آغاز شد. سپس محققین، تلاش‌های عمیق‌تری برای ترکیب منابع مخابرات کلاسیک، مخابرات کوانتومی و درهم‌تنیدگی برای فرمول‌بندی پروتوکل‌های جدید کوانتومی انجام دادند.

برای درک مفهوم سنتز در مدارهای کوانتومی می‌توان آن را با مسئله‌ی سنتز مستقل از تکنولوژی[۴۰] در دنیای کلاسیک هم‌ارز دانست. در دنیای کلاسیک هنگامی‌که در سطح بالا توصیفی از عملکرد مدار وجود داشته باشد، در اولین گام سعی می‌شود با استفاده از کتابخانه‌ی گیت‌های پایه‌ی کلاسیک (مانند AND) این توصیف را بیان کرده و تا حد امکان با توجه به محدودیت‌های مداری و بدون در نظر گرفتن بستری که مدار در آن پیاده‌سازی خواهد شد، آن را ساده‌سازی کرد. مشابه این تعریف در دنیای کوانتوم با عملگرهای کوانتومی امکان‌پذیر است.

همان‌طورکه پیش‌تر گفته شد، روش‌های سنتز مدارهای کوانتومی به دو دسته مبتنی بر تجزیه و مبتنی بر ترکیب تقسیم می‌شوند. در روش مبتنی بر ترکیب از الگوریتم‌های تکاملی استفاده می‌شود. الگوریتم‌های تکاملی از روش‌ها و عملیات ابتدایی برای حل مساله استفاده می‌کنند و در طی یک سری از تکرارها به راه‌حل مناسب برای مسئله می‌رسند. این الگوریتم‌ها غالباً از یک جمعیت حاوی راه‌حل‌های تصادفی شروع می‌کنند و در طی هر مرحله تکرار سعی در بهتر کردن مجموعه راه‌حل‌ها دارند. در آغاز کار تعدادی از اعضای جامعه به‌صورت تصادفی حدس زده شده، سپس تابع هدف یا برازندگی برای هر یک از این اعضا محاسبه و نخستین نسل ایجاد خواهد شد. اگر هیچ یک از معیارهای خاتمه بهینه‌سازی دیده نشوند، ایجاد نسل جدید آغاز خواهد شد. اعضا برحسب میزان شایستگی‌شان برای تولید فرزندها انتخاب می‌شوند. این افراد به‌عنوان والدین محسوب می‌شوند و بازترکیب فرزندان را تولید می‌نمایند. سپس تمامی فرزندها با یک مقدار معینی از احتمال، یعنی همان جهش، تغییر ژنتیکی می‌یابند. اکنون میزان شایستگی (برازندگی) فرزندان تعیین و در اجتماع جایگزین والدین شده و نسل جدید را ایجاد می‌نمایند. این چرخه آنقدر تکرار می‌شود تا یکی از معیارهای پایان بهینه‌سازی کسب شود. این روش‌ها از نظر یافتن به مدار کوانتومی با کاربرد خاص بهینه سازی شده، و امکان در نظر گرفتن هم‌زمان چند معیار بهینه‌سازی حائز اهمیت هستند.

یکی از مشکلاتی که در سنتز منطقی کوانتومی مبتنی بر ترکیب وجود دارد محدود بودن تعداد کیوبیت‌ها است، چون فضای جستجوی بسیار بزرگی برای یافتن جواب بهینه وجود دارد و ارزیابی تابع برازندگی برای هر جواب نامزد به زمان زیادی نیاز دارد، به طور یکه در پژوهش‌هایی که تا کنون انجام شده، این نوع سنتز روی مدارهایی با حداکثر تعداد ۵ کیوبیت جواب می‌دهند[۶].

با استفاده از ویژگی‌های ماتریسی مدار و گیت‌های کوانتومی و نیز تعریف گیت‌های خاص و روش‌های تجزیه آنها با توجه به روش‌های تجزیه ریاضی، ماتریس مدار موردنظر به دسته ماتریس‌های خاص که همان گیت‌های کوانتومی هستند، تجزیه می‌شود.

در این بخش، مروری بر انواع مختلف روش‌های سنتز مبتنی بر ریاضی صورت می‌گیرد.

۳-۱-استفاده از تجزیه QR در جبر خطی

مقاله [۲۱] نشان می‌دهد که تکنیک‌های استاندارد جبر خطی عددی را می‌توان برای نمایش محاسبات کوانتومی به‌عنوان دنباله‌ای از عملیات کوانتومی ساده که عملگرهای داده‌های کوانتومی نامیده می‌شوند، روی تک‌کیوبیت‌های کوانتومی استفاده کرد. درنتیجه تعداد گیت‌های CNOT در مرتبه $O(n^3 4^n)$ حاصل می‌گردد.

۳-۲- استفاده از بیش‌ترین کران پایین

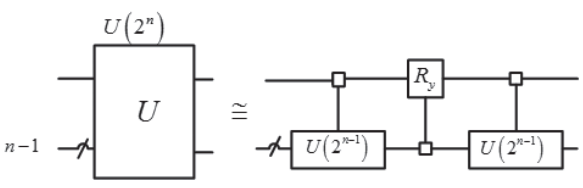
مقاله [۲۲]، مدارهای کوانتومی ارائه می‌دهد که یک عملگر واحد دو کیوبیتی دلخواه را تا یک فاز جهانی شبیه‌سازی می‌کند. برای چندین کتابخانه گیت کوانتومی، ثابت می‌کند که شمارش گیت‌ها در بدترین و متوسط حالت بهینه است به این معنا که بیش‌ترین کران پایین[۴۲] برای تعداد CNOTها برابر با $[(\frac{1}{4})(4^n - 3n - 1)]$ می‌باشد. ذخیره‌سازی موقت استفاده نمی شود زیرا پیاده‌سازی فیزیکی گران است. با مشخص شدن این حد مرزی امکان محاسبه فاصله مقادیر محاسبه شده در روش‌های معرفی شده تا حالت بهینه شناخته شده تا کنون (یعنی سنتز با کم‌ترین تعداد CNOT) میسر شده است.

۳-۳- روش تجزیه CS

تجزیه CS [۲۳] برای ماتریس دلخواه یکان $2^n * 2^n$ با نام U، با استفاده از رابطه (۴) انجام می‌شود که در این رابطه ماتریس‌های L_1، L_2، R_1 و R_2 ماتریس‌های یکانی $2^{n-1} * 2^{n-1}$ و C و S ماتریس‌های $2^{n-1} * 2^{n-1}$ یکانی قطری با مقادیر حقیقی هستند به‌طوری‌که $C^2 + S^2 = I_{n-1}$.

$$U = \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \qquad (۴)$$

سمت چپ و راست رابطه (۴)، گیت‌های به‌طور یکنواخت کنترلی چند کیوبیتی هستند. ماتریس میانی، ساختار یکسانی با گیت R_yمالتی‌پلکس شده‌ای دارد که کیوبیت هدف آن با ارزش‌ترین کیوبیت است. از این‌رو نمایش مداری این تجزیه همانند شکل (۴)است.



شکل ۴: شکل مداری تجزیه SC [۳۲]

۳-۴- روش سنتز CSD

در روش معرفی‌شده در [۲۴] الگوریتم سنتزی تحت عنوان CSD[۴۳] پیشنهاد شده است که از روش تجزیه CS برای تجزیه ماتریس دلخواه یکانی U (2^n) استفاده می‌کند. در این الگوریتم، تجزیه CS به‌صورت

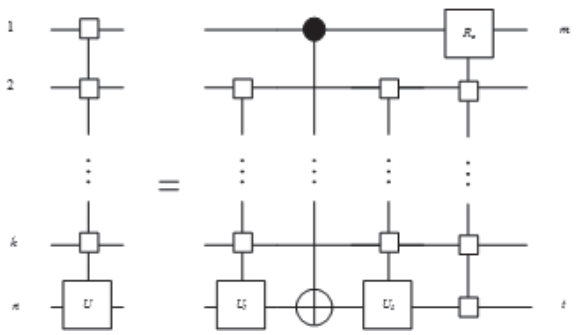
[Downloaded from kiaeee.ir on 2026-11-16]

بازگشتی بر روی گیت‌های به‌طور یکنواخت کنترلی چندکیوبیتی در رابطه (۴) اعمال می‌شود و تا زمانی که همه گیت‌ها به گیت‌های به‌طور یکنواخت کنترلی تک‌کیوبیتی تبدیل شوند، روند بازگشتی ادامه می‌یابد. روند سنتز روش CSD به‌طور دقیق‌تر در رابطه (۵) نشان داده شده است. در این رابطه $\gamma(i)$ تابع خط‌کش[۴۴] معرفی‌شده در[۲۴] است. $\gamma(i)+1$ محل کم‌ارزش‌ترین بیت غیرصفر را در نمایش دودویی i نشان می‌دهد.

$$U(2^n) = F_n^{(n-1)}(U(2))_{(i=1)}^{(2^n-1)} F_{(n-\gamma(i))}^{(n-1)}(R_y) F_n^{(n-1)}(U(2)) \qquad (۵)$$

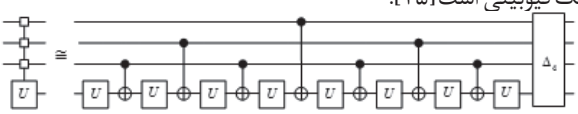
گیت‌هایی که در رابطه (۵) ظاهر شده‌اند، می‌توانند با استفاده از رابطه (۶) تجزیه و به سه گیت با اندازه‌های کوچک‌تر و یک گیت CNOT تبدیل شوند. در این رابطه گیت CNOT با نماد $C^{c,t}$ نشان داده شده که c و t به ترتیب محل بیت کنترلی و بیت هدف را مشخص می‌کنند. نمایش این تجزیه در شکل (۵) نشان داده شده است.

$$F_n^{n-1}\left(U(2)\right) = F_n^{n-2}\left(U(2)\right) C^{1,n} F_n^{n-2}\left(U(2)\right) F_n^{n-1}\left(R_z\right) \qquad (۶)$$



شکل ۵: روند بازگشتی تجزیه مربوط به رابطه (۵) [۴۲]

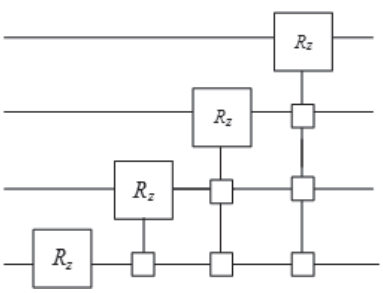
با ادامه رابطه (۶) به‌صورت بازگشتی، مداری با 2^n-1 گیت به‌طور یکنواخت کنترلی تک‌کیوبیتی و یک گیت قطری Δ_n به‌دست می‌آید. گیت Δ_n قابل‌تجزیه به مداری با 2^n-2 گیت CNOT وگیت تک‌کیوبیتی است[۲۵].



شکل۶: تجزیه یک گیت قطری بلوکی با چهارکیوبیت[۵۲]

در شکل (۶) تجزیه گیت به‌طور یکنواخت کنترلی تک‌کیوبیتی با چهار کیوبیت نشان داده شده است.

گیت Δ_n ظاهر شده در انتهای تجزیه گیت قطری بلوکی U، با زنجیرهای از گیت‌های قطری بلوکی همانند شکل(۷) قابل پیاده‌سازی است.



شکل ۷: تجزیه گیت قطری [۵۲]

در [۲۴] به‌منظور کاهش تعداد گیت‌های CNOT، با معرفی رابطه(۷) و جایگذاری آن در رابطه (۵) و نیز ادغام گیت‌های با گیت‌های Δ_n به‌طور یکنواخت کنترلی مجاورشان، رابطه (۸) به‌دست‌آمده است.

$$F_n^{n-1}\left(U(2)\right) = \Delta_n \tilde{F}_n^{n-1}\left(U(2)\right) \qquad (۷)$$

$$U\left(2^n\right) = \Delta_n \tilde{F}_n^{n-1}\left(U(2)\right) \prod_{i=1}^{2^n-1} \tilde{F}_{n-\gamma(i)}^{n-1}\left(R_y\right) \tilde{F}_n^{n-1}\left(U(2)\right) \qquad (۸)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در روش CSD با شروع از تجزیه CS و ادامه آن به‌صورت بازگشتی، گیت‌های به‌طور یکنواخت کنترلی تک‌کیوبیتی تولید می‌شوند. روش تجزیه‌ای برای این دسته از گیت‌ها معرفی شده است که آن‌ها را به گیت‌های CNOT و گیت‌های تک‌کیوبیتی (کتابخانه گیت‌های پایه‌ای) تبدیل می‌کند. با ارائه راه‌کارهایی هزینه مدار تولیدشده با کاهش تعداد گیت‌ها بهبود پیدا می‌کند.

نمایشی از تجزیه مدار سه کیوبیتی با استفاده از روش سنتز CSD در شکل (۸) نشان داده شده است. زنجیره گیت‌های R_z در انتهای مدار تجزیه گیت قطری Δ_3 را نشان می‌دهد. نماد $\tilde{U}$ در این شکل به منظور نمایش گیت‌های هدف در گیت‌های $\tilde{F}_t^m\left(U(2)\right)$ که در بالا معرفی شدند به کار رفته است.

تعداد CNOTهای هر گیت به‌طور یکنواخت کنترلی تک‌کیوبیتی برابر با $2^{n-1}-1$ و تعداد تک‌کیوبیتی‌های آنها برابر با 2^{n-1} است. برای محاسبه تعداد CNOT های کل تولیدشده در این روش کافی است تعداد گیت‌های به‌طور یکنواخت کنترلی تک‌کیوبیتی را در تعداد گیت‌های CNOT هرکدام ضرب کرده و عدد به‌دست‌آمده را با تعداد گیت CNOT گیت قطری تولیدشده در انتهای مدار جمع کنیم تا هزینه نهایی مدار حاصل شود. با بهینه‌سازی که در [۱۳] معرفی‌شده، تعداد CNOTها یک واحد و تعداد تک‌کیوبیتی‌ها n واحد بیشتر کاهش‌یافته و به ترتیب به‌صورت $\frac{1}{2}4^n - 2^{n-1} - 2$ و $\frac{1}{2}4^n - 2^{n-1} - n - 1$ محاسبه می‌شوند.

۳-۵- روش سنتز QSD

در مقاله [۱۰]، ماتریس‌های قرارگرفته در سمت راست و نیز سمت چپ رابطه (۵) را می‌توان با گیت $F_\tau^1(U(2^{(n-1)}))$ نشان داد. به‌علاوه، ماتریس میانی نشان داده‌شده در این رابطه برابر است با گیت $F_1^{n-1}\left(R_y\right)$. بدین ترتیب رابطه (۵) در نمایش گیتی خود می‌تواند به‌صورت رابطه (۹) نوشته شود.

$$U\left(2^n\right) = F_\tau^1\left(U_1\left(2^{n-1}\right)\right) F_1^{n-1}\left(R_y\right) F_\tau^1\left(U_2\left(2^{n-1}\right)\right) \qquad (۹)$$

در[۸] نشان داده‌شده است که هر ماتریس قطری بلوکی می‌تواند به رابطه (۱۰) تجزیه شود.

$$\begin{bmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix} \qquad (۱۰)$$

ماتریس‌های V و Δ به‌صورت زیر از U_1 و U_2 به دست می‌آیند.

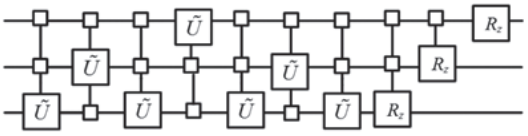
$$U_1 U_2^\dagger = V \Delta^2 V^\dagger$$

Δ و V می‌توانند از U_1 و $U_2^\dagger$ با روش استاندارد قطری‌سازی [۲۵] استخراج شوند. همچنین $W = \Delta V^\dagger U_2$. در رابطه (۱۱) نمایش این رابطه با گیت، نشان داده شده است.

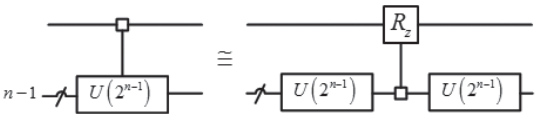
$$F_\tau^1\left(U(2^{n-1})\right) = U\left(2^{n-1}\right) F_1^{n-1}\left(R_z\right) U\left(2^{n-1}\right) \qquad (۱۱)$$

[Downloaded from kiaeee.ir on 2026-11-16]

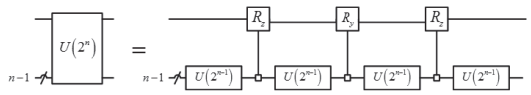
عمل تجزیه این ماتریس‌ها در شکل (۹) نشان داده شده و این عمل تجزیه دی‌مالتی‌پلکس کردنِ یک مالتی‌پلکسر نامیده شده است.



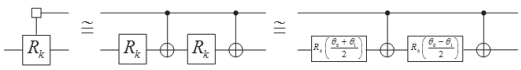
شکل ۸: مثالی از تجزیه گیت سه کیوبیتی با روش DSC [۴۲]



شکل ۹: نمایش مداری رابطه (۱۱)[۸]



شکل ۱۰: روش سنتز DSQ برای [۸]



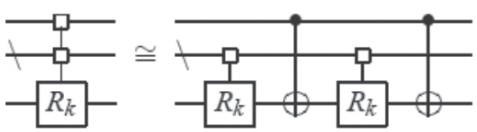
شکل ۱۱: تجزیه گیت ،قطری بلوکی بر روی دو کیوبیت [۸]

با جایگذاری رابطه (۱۱) در رابطه (۹) رابطه (۱۲) به دست می‌آید که عمل QSD [۴۵] را نشان می‌دهد. این رابطه بازگشتی تا ادامه داده می‌شود و مدار بهینه به‌دست‌آمده برای U(4) در[۲۴] با سه گیت CNOT، به‌جای آن قرار داده می‌شود.

$$U(2^n)= U(2^{n+1})F_1^{n+1}(R_z)U(2^{n+1})\,F_1^{n+1}(R_y)\,U(2^{n+1})\,F_1^{n+1}(R_z)\,U(2^{n+1}) \quad (۱۲)$$

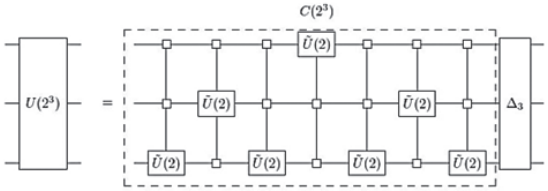
در شکل (۱۰) روش سنتز QSD نشان داده شده است. به این ترتیب ماتریس$U(2^n)$ به چهار ماتریس$U(2^{n-1})$ و سه گیت R_k ($k \in \{y,z\}$) تبدیل می‌شود. همان‌طورکه مشاهده می‌شود در روش QSD از گیت‌های R_z و R_y مالتی‌پلکس شده برای سنتز مدار استفاده می‌شود. روش معرفی‌شده برای سنتز گیت‌های فوق در [۸] در ادامه بررسی می‌شود. تجزیه گیت R_k قطری بلوکی بر روی دو کیوبیت در شکل (۱۱) نشان داده شده است که در این شکل $k \in \{y,z\}$ می‌باشد.

با تعمیم شکل (۱۱) و افزودن کیوبیت انتخاب به دو طرف رابطه می‌توان به شکل (۱۲) رسید.



شکل ۱۲: تجزیه بازگشتی گیت قطری بلوکی R_k [۸]

با جایگذاری بازگشتی شکل‌ها در یکدیگر می‌توان به تجزیه نهایی

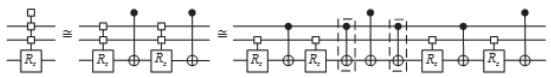


شکل ۱۴: مدار حاصل از سنتز سه کیوبیتی با روشDSC [۶۲].

گیت قطری بلوکی R_k رسید. مدار نهایی تنها از گیت‌های CNOT و گیت‌های تک‌کیوبیتی تشکیل‌شده است. مثالی از این تجزیه برای با ۴ کیوبیت در شکل (۱۳) نشان داده شده است.

لازم به ذکر است که تجزیه نشان داده شده در شکل(۱۳) و حالت‌های تعمیم یافته آن متقارن[۴۶] است. بنابراین با جایگذاری وارون تجزیه به‌جای گیت قطری بلوکی دوم در شکل(۱۳) (همان‌طورکه در مدار سمت راست مشاهده می‌شود)، می‌توان تعدادی گیت CNOT را در هر مرحله جایگذاری حذف کرد. تعداد CNOT های نهایی برای گیت قطری بلوکی R_k برابر 2^m می‌باشد که m تعداد کیوبیت‌های انتخاب را در گیت قطری بلوکی مورد نظر نشان می‌دهد.

موضوع مهمی که باقی می‌ماند این است که سطحی[۴۷] انتخاب شود که در آن بازگشت مجدد متوقف شود و موارد پایانی با تکنیک‌های هدف خاص رسیدگی شود.



شکل ۱۳: تجزیه گیت قطری بلوکی بر ۴ کیوبیت [۸]

بنابراین، فرض می‌شود C_j حداقل تعداد گیت‌هایCNOT مورد نیاز برای پیاده‌سازی یک عملگر یکانی j کیوبیتی با استفاده از برخی از الگوریتم‌های سنتز مدار کوانتومی باشد. با توجه به شکل (۱۰)، رابطه (۱۳) برای C_j تعریف می‌شود:

$$C_j \le 4C_{j-1} + 3\times 2^{j-1} \quad (۱۳)$$

اکنون می‌توان این روش سنتز را به صورت بازگشتی اعمال کرد که با تکرار نابرابری فوق مطابقت دارد. اگر عملگرهای l- کیوبیتی ممکن است با استفاده از $C_l \le$ تعدادگیت‌های CNOT پیاده‌سازی شوند، می‌توان نابرابری زیر را برای از طریق القاء اثبات کرد.

$$C_n \le 4^{n-l}(C_l + 3\times 2^{l-1}) - 3\times 2^{n-1} \quad (۱۴)$$

درمقاله [۸]، $l=1$ و $C_l = 0$ برای عملگرهای تک‌کیوبیتی و $l=2$ و $C_l = 3$ برای عملگرهای دوکیوبیتی در نظر گرفته است.

با بهینه‌سازی‌هایی که بر روی این روش انجام می‌شود، یعنی با حذف $(4^{n-l}-1)/3$ و اضافه کردن $4^{n-2}-1$ در رابطه بازگشتی(۱۴) با در نظر گرفتن حالت $l=2$ ، $C_l = 3$تعداد CNOT ها برای روش QSD در رابطه (۱۵) به‌دست می‌آید.

$$C_n \le \left(\frac{23}{48}\right)4^n - \left(\frac{3}{2}\right)2^n + \frac{4}{3} \quad (۱۵)$$

فرض می‌شود S_j حداقل تعداد گیت‌های تک‌کیوبیتی مورد نیاز برای پیاده‌سازی یک عملگر یکانیj کیوبیتی با استفاده از برخی از الگوریتم‌های سنتز مدار کوانتومی باشد، رابطه بازگشتی (۱۶) برایS_j تعریف می‌شود:

$$S_j \le 4S_{j-1} + 3\times 2^{j-1} + 1 \quad (۱۶)$$

اکنون می‌توان این روش سنتز را به صورت بازگشتی اعمال کرد که با تکرار نابرابری فوق مطابقت دارد. اگر عملگرهای l- کیوبیتی ممکن است با استفاده از $S_l \le$ تعدادگیت‌های تک‌کیوبیتی پیاده‌سازی شوند، می‌توان نابرابری زیر را برای S_n از طریق القاء اثبات کرد.

$$S_n \le 4^{n-l}(S_l + 3\times 2^{l-1} + 1) - 3\times 2^{n-1} - 1 \quad (۱۷)$$

[Downloaded from kiaeee.ir on 2026-11-16]

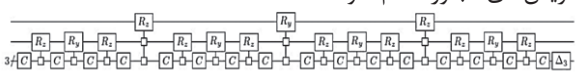
در این قسمت $l=2$ و $C_l=7$ برای عملگرهای تک‌کیوبیتی در نظر گرفته است. به‌طور مشابه و با انجام بهینه‌سازی‌هایی بر روی رابطه بازگشتی (۱۷)، تعداد گیت‌های تک‌کیوبیتی برای روش QSD در رابطه (۱۸) به‌دست می‌آید.

$$S_n \le \frac{17}{24}4^n - \frac{3}{2}2^n + \frac{2}{3} \qquad (۱۸)$$

مقاله[۸]، توضیح مختصری درباره معیار NNC داده است. همه گیت‌های CNOT که از این سنتز به‌دست آمده‌اند، دو کیوبیتی هستند. گیت‌هایی که کیوبیت هدف و کنترل در مجاورت همدیگر قرار دارند یعنی مقدار فاصله‌شان (k) برابر با یک است، مقدار NNC شان برابر با صفر است. اما در شکل (۱۳)، 2^{n-k} گیت‌های CNOT دو کیوبیتی با طول k وجود دارد، پس NNC هر کدام از این نوع گیت CNOT برابر k-۱ می‌باشد. درنهایت هزینه NNC کل مدار برابر با مجموع NNC تک تک گیت‌های CNOT می‌باشد.

۳-۶- روش سنتز BQD

در مقاله [۲۶]، با ترکیب دو روش QSD و CSD روش جدیدی به نام BQD[۴۸] ارائه شده که موازنه‌ای[۴۹] را بین تعداد گیت‌های CNOT و تعداد گیت‌های تک‌کیوبیتی فراهم می‌کند. در این روش، ابتدا سنتز بازگشتی QSD برای سنتز ماتریس $U(2^n)$ مورد استفاده قرار می‌گیرد، سپس در ادامه با تعیین سطح تجزیه l $(l \ge 3)$، سنتز QSD متوقف شده و ماتریس‌های باقیمانده در روند الگوریتم بازگشتی سنتز با استفاده از روش CSD سنتز شده و بهینه‌سازی‌هایی که در روند سنتز لحاظ شده‌اند، جایگزین می‌شوند. بهینه‌سازی‌های اعمال شده بدین ترتیب هستند که می‌توان گیت‌های قطری Δ_l را که در ماتریس‌های یکانی l کیوبیتی سنتز شده به روش CSD تولید می‌شوند از خطوط کنترلی گیت‌های Rp مالتی‌پلکس شده $(p \in \{y,z\})$ عبور داده و با ماتریس‌های مجاور ادغام نمود.



شکل ۱۵: مدار حاصل از سنتز پنج کیوبیتی با روش DQB با فرض سطح تجزیه [۶۲]

در این مقاله، مدار حاصل از سنتز یک ماتریس یکانی l کیوبیتی به روش CSD که گیت قطری از آن مدار حذف شده است با نام بلوک پایه l کیوبیتی بیان شده است. در این مقاله، یک بلوک پایه l کیوبیتی با نماد $C(2^l)$ مشخص می‌شود. به طور مثال در شکل (۱۴)، بلوک پایه سه کیوبیتی به صورت $C(2^3)$ مشخص شده است. شکل نتیجه حاصل از سنتز گیت دلخواه پنج کیوبیتی را با روش BQD با فرض سطح تجزیه $L=3$ نشان می‌دهد. در شکل (۱۵) هر یک از بلوک‌های پایه سه کیوبیتی با C نمایش داده می‌شوند.

۳-۷- روش سنتز IBQD

در [۲۷]، یک روش بهبود یافته پارامتری برای سنتز مدارهای کوانتومی مبتنی بر روش BQD با نام IBQD[۵۰] معرفی شد. روش IBQD یک روش پارامتری و کلی سنتز است که روش‌های پیشین از جمله CSD،QSD و BQD حالت‌های خاصی از آن می‌باشند. دو تابع هزینه کوانتومی و عمق برای مدارات تولیدشده در فضای جواب توسط این روش بر حسب پارامترهای روش محاسبه و سنتز با یافتن جواب‌های بهینه مربوط به این توابع هزینه انجام شد. نشان داده شد روش IBQD موازنه‌ای بین هزینه کوانتومی و عمق مدار ایجاد می‌کند. برای سنتز چهارکیوبیتی، IBQD در مقایسه با روش‌های QSD ، CSD و BQD کم‌ترین هزینه کوانتومی را تولید می‌کند. نقاط کمینه برای هزینه عمق مدار در حالتی که روش IBQD معادل روش QSD است، رخ می‌دهد. همچنین با توجه به این که مساحت مدار تابعی از معیار هزینه کلی گیت و زمان اجرای مدار تابعی از عمق مدار است، لذا مجموعه جواب‌های به دست آمده در روش IBQD موازنه‌ای بین مساحت و زمان اجرای مدارهای سنتز شده ایجاد می‌کنند.

به علاوه، روش IBQD می‌تواند نتایج بهتری از لحاظ هزینه کوانتومی و عمق مدار نسبت به روش BQD تولید کند.

۳-۸- سنتز مدار کوانتومی مبتنی بر بهینه‌سازی شبکه منطقی

در مقاله [۲۸]، از طریق بهینه‌سازی شبکه منطقی برای کاهش دادن معیار عمق T مدارهای کوانتومی استفاده کرده است. عمق ضربی یک شبکه منطقی بر روی گیت‌های پایه $\{\wedge, \oplus, \neg\}$، بزرگ‌ترین تعداد گیت‌های $\wedge$ در هر مسیر از ورودی اولیه تا خروجی اولیه در شبکه است. به این منظور یک الگوریتم سنتز منطقی مبتنی بر برنامه‌نویسی پویا را برای کاهش عمق ضربی شبکه‌های منطقی را پیشنهاد داده است که از شمارش برش[۵۱]، تعادل درخت[۵۲] و نمایش‌های مجموع حاصل‌ضرب انحصاری(ESOP) [۵۳] استفاده می‌کند. همچنین این الگوریتم برای رمزنگاری و محاسبات کوانتومی کاربرد دارد، که در آن کاهش معیار عمق ضربی مستقیماً به کاهش معیار عمق T مدار کوانتومی مربوطه ترجمه می‌شود. نتایج تجربی این مقاله بهبودهایی در معیار عمق T را نسبت به روش‌های پیشرفته بهینه‌سازی شده با دست در تعدادی از مدارهای کوانتومی به‌عنوان مثال، AES، SHA و محاسبات ممیز شناور نشان می‌دهد.

۳-۹- سنتز مدار کوانتومی با قابلیت تحمل‌پذیری اشکال

از آنجا که سیستم‌های کوانتومی بیشتر از محاسبات کلاسیک در معرض خطا هستند، مدارهای کوانتومی با قابلیت تحمل‌پذیری اشکال[۵۴] برای پیاده‌سازی عملی موردنیاز هستند.

طبق تعریف سنتز تحمل‌پذیر اشکال، در ابتدا عملگر یکانی ورودی با کمک یکی از روش‌های معمولی سنتز، تجزیه می‌شود و پس از آن گیت‌های تک‌کیوبیتی تولیدشده به مجموعه‌ی CTL تجزیه می‌شوند. بسیاری از کدهای تصحیح اشکال کوانتومی [۲۹] تا [۳۲] برای ممکن ساختن محاسبات تحمل‌پذیر اشکال ارائه شده‌اند که از گیت‌های کتابخانه حاوی گیت‌های کلیفورد و T استفاده می‌کنند. برخی پژوهش‌های اخیر در حوزه سنتز کوانتومی نیز به سنتز کوانتومی باهدف تحمل‌پذیری اشکال می‌پردازند. در این پژوهش‌های [۳۲] تا [۳۶] سنتز منطقی مدارهای کوانتومی عمدتاً با استفاده از کتابخانه گیت‌های کلیفورد و T صورت می‌گیرند.

همان‌طورکه گفته شد، کتابخانه کلیفورد و T یک کتابخانه‌ی تقریباً جهانی هست. یکی از راهکارهایی که برای کاهش محدودیت این کتابخانه‌ی ارائه شده است، گسترش آن است[۳۴]، یعنی افزودن گیت‌های جدید به کتابخانه. این عمل سبب می‌شود در صورت وجود این گیت‌ها در مدار کوانتومی بدون خاصیت تحمل‌پذیر اشکال نیازی به سنتز آن نباشد. همین امر سبب بهبود هزینه‌های این سنتز خواهد شود. حتی باوجود گسترش کتابخانه بازهم امکان تجزیه‌ی دقیق یک گیت دلخواه به گیت‌های کلیفورد و T، وجود ندارد.

۳-۹-۱- انواع سنتز بر پایه کتابخانه CTL

سنتزهای مختلفی که بر روی کتابخانه CTL انجام شده‌اند، به دو دسته تقسیم می‌شوند:

سنتز تقریبی[۵۵]: در سنتز تحمل‌پذیر اشکال به‌طور معمول تجزیه‌ی نهایی به صورت تقریبی از عملگر یکانی دلخواه U بیان می‌شود. در این حالت عملگر تجزیه‌ی عملگر یکانی دلخواه U به‌صورت زنجیرهای از گیت‌ها طبق (۱۹) نمایش داده می‌شود، به نحوی V نزدیک‌ترین پاسخ به عمگر U باشد.

[Downloaded from kiaeee.ir on 2026-11-16]

$$V \approx U = g_0 g_1 g_2 \cdots g_n \qquad (۱۹)$$

فاصله‌ای که در انتها U و V با یکدیگر دارند، آستانه‌ی خطا[۵۶] (ε) نامیده می‌شود. ε یک مقدار تجربی است و برمبنای کاربرد تعریف می‌شود [۳۹-۳۷].

راه‌حلی برای مسئله سنتز تقریب مدار تک‌کیوبیتی در [۴۰] با استفاده از جستجوی ناآگاهانه[۵۷] برای یافتن مدارهای بهینه پیشنهاد شد. با این حال، جستجوی ناآگاهانه به زمان اجرای نمایی نیاز دارد و به نظر می‌رسد که منابع محاسباتی کلاسیک برای مقادیر خطای تقریبی (ε) کمتر 10^{-4} به آخر می‌رسد. دقت تقریب را می‌توان با استفاده از الگوریتم Solovay-Kitaev [۴۱] با دنباله‌ای از گیت‌ها به طول $O\left(\log^{3.97}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$ و با زمان اجرای $O\left(\log^{2.71}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$ بهبود بخشید.

در [۴۲]، الگوریتمی همراه با پیاده‌سازی‌اش که تقریب‌های بهینه T، دوران‌های Z تک‌کیوبیتی را با استفاده از مدارهای کوانتومی متشکل از گیت‌های Clifford+T پیدا می‌کند، ارائه شده است. الگوریتم پیشنهادی قادر به مدیریت اشکال در تقریب تا اندازه 10^{-15} است که منجر به طرح‌های مدار تک‌کیوبیتی بهینه مورد نیاز برای پیاده‌سازی الگوریتم‌های کوانتومی مقیاس‌پذیر می‌شود.

در مقاله[۳۴]، یک روش کارا برای سنتز مدار کوانتومی باقابلیت تحمل‌پذیری اشکال ارائه شده است. ورودی این سنتز یک مدار کوانتومی غیر FT و خروجی آن یک مدار FT بهینه شده برای شش PMD[۵۸] مختلف است و همچنین از الگوریتم SKA[۵۹] و جدول کش[۶۰] برای گردآوری داده‌های کوانتومی استفاده کرده است. برای ارزیابی این سنتز از دو معیار هزینه استفاده می‌شود: تعداد عملیات اولیه[۶۱] (ops) و چرخه‌های اجرای در مسیر بحرانی[۶۲] (چرخه). نتایج نشان می‌دهد که با توجه به PMDهای مختلف به‌طور متوسط هزینه ops ۵۸,۱ درصد تا ۸۷,۰ درصد و هزینه چرخه بین ۴۲,۸ تا ۷۶,۴ درصد کاهش می‌یابد.

در مقاله [۴۳]، مدارهای کوانتومی از آبشاری از گیت‌های کوانتومی تشکیل شده‌اند. در یک مدار منطقی کوانتومی ناآگاه از طراحی فیزیکی، فرض می‌شود که یک گیت بر روی مجموعه دلخواه کیوبیت‌ها، بدون در نظر گرفتن مکان فیزیکی کیوبیت‌ها، عمل می‌کند. با این حال، درواقعیت، کیوبیت‌های فیزیکی باید در یک شبکه قرار گیرند. هر گره از شبکه، یک کیوبیت را نشان می‌دهد. این شبکه یک معماری کامپیوتر کوانتومی را پیاده‌سازی می‌کند. یک محدودیت فیزیکی وجود دارد که اغلب اعمال می‌شود، که گیت‌های کوانتومی فقط می‌توانند روی کیوبیت‌های مجاور در شبکه کار کنند. بنابراین، اگر کیوبیت‌های مدار منطقی مجاور نباشند، باید یک کانال ارتباطی ساخته شود. این مقاله، ابزاری به نام سنتز مدار کوانتومی تحمل‌پذیر اشکال آگاه از طراحی فیزیکی (PAQCS)[۶۳] را معرفی می‌کند. این روش شامل دو الگوریتم است: یکی برای قرار دادن کیوبیت فیزیکی و دیگری برای مسیریابی ارتباطات. با کمک این دو الگوریتم، سربار تبدیل یک مدار منطقی به فیزیکی به طور متوسط ۳۰,۱ درصد نسبت به کار قبلی [۳۴] کاهش می یابد. الگوریتم‌های بهینه‌سازی در PAQCS بر روی مدارهای پیاده‌سازی شده با استفاده از عملیات کوانتومی که توسط دو توصیف مختلف ماشین فیزیکی کوانتومی و سه کد تصحیح خطای کوانتومی پشتیبانی می‌شوند، ارزیابی می‌شوند. آنها تعداد عملیات اولیه را ٪۱۱/۵- ٪۶۸/۶ و تعداد چرخه های اجرا را ٪۱۶/۹- ٪۵۹/۴ کاهش می‌دهند.

یکی از معروف‌ترین الگوریتم‌هایی که در سنتز تقریبی استفاده می‌شود، الگوریتم STA[۶۴] است. الگوریتم STA بهبود یافته الگوریتم فلور[۶۵] است که در تعریف ۲-۱ بیان شده است.

تعریف۲ -۱: الگوریتم فلور برای تخمین گیت تک‌کیوبیتی ورودی بهتوالی از گیت‌های تک‌کیوبیتی مجموعه‌ی مرجع 5 استفاده می‌شود. در این الگوریتم در ابتدا برای گیت یکانی ورودی، توالی از گیت‌های مجموعه‌ی مرجع با طول مشخص، که معمولاً ۱۵ است، تعیین و در جدولی ذخیره می‌شود. در گام بعد برای تجزیه‌ی گیت یکانی با طول N+1 با کمک ساختار جستجوی درختی[۶۶] در جدول به‌دست آمده، در میان تجزیه‌های با طول N جستجو می‌کند. در این جستجوی درختی از تجزیه‌ی مقادیر محاسبه شده پرش[۶۷] می‌کند. درصورتی‌که تجزیه‌ی جدیدی محاسبه شود به مجموعه گیت به دست آمده افزوده خواهد شد. انجام جستجوی درختی سبب افزایش نمایی زمان اجرای الگوریتم می‌شود [۴۴].

در الگوریتم STA برای کاهش زمان جستجو در جدول موجود چندین راه‌کار ارائه شده است:

۱- جستجوی دوطرفه[۶۸]: در این حالت دو جستجوی موازی از ابتدای جدول تا وسط آن و دیگری از وسط جدول تا انتهای آن انجام می‌شود. این روش جستجو سبب کاهش زمان اجرا به نصف زمان اجرای الگوریتم فلور می‌شود [۴۵].

۲- افزایش دقت جستجو در نخستین مرحله: این افزایش دقت سبب می‌شود زمان یافتن عملگرهای یکانی در جستجوهای بعدی کاهش یابد [۴۵].

با وجود این راه‌کارها برای کاهش زمان اجرای این الگوریتم، بازهم زمان اجرای آن به صورت نمایی است. کم بودن رشد تعداد گیت خروجی با کاهش آستانه‌ی خطا، مزیت این الگوریتم نسبت به الگوریتم SKA است. در مقابل، نمایی بودن زمان اجرا عیب این الگوریتم است [۴۵]. مرتبه‌ی محاسبه شده برای تولید تعداد گیت خروجی، از مرتبه‌ی $O\left(\log^{6}(1/\varepsilon)\right)$ است [۴۴].

سنتز دقیق: به صورت تجزیه‌ی دقیق حالت‌هایی از ورودی به کتابخانه‌ی CTL بیان می‌شود.

در [۴۲]، یک هم‌ارزی از مجموعه یکانی‌های قابل محاسبه توسط مدارها بر روی CTL و مجموعه یکانی‌هایی برروی حلقه $\mathbb{Z}\left[1/\sqrt{2}, i\right]$[۶۹]، در حالت تک‌کیوبیتی نشان داده شده است. سپس از یک الگوریتم سنتز کارآمد، با تضمین بهینه بودن دقیق بر روی تعداد گیت‌های هادامارد و T استفاده شده است. حدس زده می‌شود که این نوع همارزی در حالت n کیوبیتی هم برقرار است.

در [۴۶]، رویکرد در [۴۲] را به گیت‌های چندکیوبیتی گسترش داده و ثابت می‌شود که یک ماتریس یکانی n کیوبیتی نمایش دقیقی بر روی مجموعه گیت CTL با کیوبیت‌های کمکی محلی دارد، اگر و تنها اگر ورودی‌های آن در حلقه $\mathbb{Z}\left[1/\sqrt{2}, i\right]$ باشند. این روش از تجزیه به ماتریس‌های ۱ و ۲ سطحی استفاده می‌کند، که در آن همیشه یک کیوبیت کمکی کافی است. اگر ورودی‌های ماتریس روی n کیوبیت به صورت $\frac{a+b\sqrt{2}+i\left(c+d\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}^{k}}$ باشند، آنگاه این الگوریتم به کران بالایی از تعداد گیت‌های $O\left(3^{2n}nk\right)$ برای سنتز کردن این گیت‌هایی که با بهینه بودن فاصله زیادی دارد، منجر می‌شود.

در مقاله [۴۷]، به بررسی مشکلات موجود در روش سنتز ارائه شده در مقاله [۴۶] می‌پردازد و سعی در بهبود آن در سطح جهانی دارد و از نمودار تصمیم گیری چند مقداری کوانتومی[۷۰] برای نمایش ماتریس به‌صورت کارا استفاده می‌کند. همچنین از گیت‌های کتابخانه کلیفورد و T استفاده کرده است و هدف اصلی تولید مدار با حداقل تعداد گیت

[Downloaded from kiaeee.ir on 2026-11-16]

T است.

مقاله [۴۸]، یک الگوریتم سنتز مدار کوانتومی را برای اجرای محاسبات کوانتومی با قابلیت تحمل‌پذیری اشکال جهانی بر اساس کدهای پیوسته[۷۱] ارائه می‌دهد. برای تحقق محاسبات کوانتومی تحمل‌پذیر اشکال، باید پروتکل‌های کوانتومی تحمل‌پذیر به مدارهای کوانتومی قابل اجرا بر اساس معیار نزدیک‌ترین همسایه (NNC) تبدیل شوند. برخلاف کدهای توپولوژیکی[۷۲] که اساساً مبتنی بر عملیات محلی تعریف می‌شوند، برای کدهای پیوسته، می‌توان مدارهای متشکل از عملیات محلی را با اعمال سنتز مدار کوانتومی به‌دست آورد. با این حال، با سنتز مدار کوانتومی موجود توسعه یافته برای الگوریتم‌های محاسباتی کوانتومی معمولی، ممکن است قابلیت تحمل‌پذیری اشکال پروتکل در مدار نهایی حفظ نشود. علاوه بر این، باید روش جدیدی برای پیاده‌سازی مدار کوانتومی محاسبات کوانتومی تحمل‌پذیر اشکال جهانی در نظر گرفته شود.

۳-۱۰- سنتز کارای مدارهای کوانتومی در پیاده‌سازی عملگرهای گروه کلیفورد

در مقاله [۴۹]، یک رویکرد سنتز خودکار برای مدارهای کوانتومی که عملگرهای گروه کلیفورد را پیاده‌سازی می‌کنند، ارائه شده است. این مدارها برای بسیاری از کاربردهای کوانتومی مانند مدارهای تثبیت کننده، مخابره از راه دور کوانتومی و غیره ضروری هستند و جنبه‌های اصلی عملکرد کوانتومی را پوشش می دهند. روش ارائه شده، برخلاف رویکردهای قبلی برای سنتز، از تکیه بر یک کتابخانه گیت عمومی اجتناب می‌کند و در عوض، از اثرات ویژه عملگرهای گروه کلیفورد در ماتریس یکانی که باید سنتز شود، بهره می‌برد. علاوه بر این، نمودارهای تصمیم‌گیری چندمقداری کوانتومی برای نمایش کارآمد این ماتریس‌ها استفاده می‌شود. نتایج تجربی تایید می‌کنند که این رهیافت، امکان تحقق فشرده عملکرد کوانتومی مربوطه را فراهم می‌کند. کار آینده بر گسترش روش پیشنهادی برای رسیدن به به عملکرد کوانتومی عمومی‌تر متمرکز است.

۳-۱۱- سنتز کارای ماتریس‌های یکانی در کامپایلرهای مدار کوانتومی

تجزیه یکانی یک روش پرکاربرد برای نگاشت الگوریتم‌های کوانتومی به مجموعه‌ای دلخواه از گیت‌های کوانتومی است. اجرای کارآمد این تجزیه امکان ترجمه گیت‌های یکانی بزرگ‌تر به عملگرهای کوانتومی ابتدایی را فراهم می‌کند، که کلید اجرای این الگوریتم‌ها در رایانه‌های کوانتومی موجود است. همچنین تجزیه می‌تواند به‌عنوان یک روش بهینه‌سازی تهاجمی برای کل مدار و همچنین برای آزمایش بخشی از یک الگوریتم بر روی یک شتاب‌دهنده کوانتومی[۷۳] استفاده شود. برای انتخاب و اجرای الگوریتم تجزیه، کیوبیت‌های کاملی در نظرگرفته شده‌اند.

مقاله [۵۰]، تکنیک تجزیه خود را براساس QSD قرار می‌دهد که تعداد $O(\frac{3}{4}4^n)$ گیت‌های غیرکنترلی را برای یک گیت ورودی n کیوبیتی ایجاد می‌کند. مدارهای حاصل تا ۱۰ برابر کوتاه‌تر از سایر روش‌ها در این زمینه هستند. در مقایسه این روش با ابزار Qubiter نشان داده شده است که این پیاده‌سازی مدارهایی با نصف تعداد گیت‌های CNOT و یک سوم طول کل مدار تولید می‌کند. علاوه بر آن، سرعت آن نیز تا ۱۰ برابر بیشتر است. بیشتر بهینه‌سازی‌ها برای بهره بردن از ساختار اساسی بالقوه در ماتریس‌های ورودی یا میانی و همچنین به حداقل رساندن زمان اجرای تجزیه پیشنهاد شده‌اند.

۳-۱۲- سنتز مدارهای کوانتومی مبتنی بر SAT {CNOT,T}

یک برنامه کوانتومی به صورت یک مدار کوانتومی کلیفورد+ T مدل‌سازی شده است که باید به منظور مطابقت با محدودیت‌های تکنولوژی کوانتومی بهینه‌سازی شود. هدف اکثر الگوریتم‌های بهینه‌سازی کاهش تعداد گیت‌های T است. با این وجود، یک هدف بهینه‌سازی ثانویه باید به حداقل رساندن تعداد عملگرهای دوکیوبیتی (گیت‌های CNOT) باشد زیرا آن‌ها در مقایسه با عملگرهای تک‌کیوبیتی نرخ خطای بالاتری دارند. مقاله [۵۱] یک الگوریتم دقیق مبتنی بر SAT را برای بازنویسی مدار کوانتومی توسعه داده‌است که هدف آن کاهش گیت‌های CNOT بدون افزایش تعداد گیت‌های T است. این الگوریتم، حداقل اندازه مدار {CNOT ,T} را برای یک توصیف چندجمله‌ای پایه از یک تبدیل یکانی پیدا می‌کند. آزمایش‌ها کاهش CNOT در مدارهای کوانتومی با تعداد T بهینه‌سازی شده را تایید می‌کنند. این مقاله، مدارهای کوانتومی را برای همه گیت‌های تک هدفی که توابع کنترلی آن‌ها یکی از نمایندگان کلاس‌های هم‌ارزی طیفی ۴۸ تایی از توابع بولی با پنج ورودی هستند، ترکیب می‌کند. آزمایش‌های این مقاله کاهش متوسط تعداد CNOT برابر با ۲۶/۸۴% را نشان می‌دهد.

۳-۱۳- الگوریتم ملاقات در وسط برای سنتز سریع مدارهای کوانتومی با عمق بهینه

مقاله [۵۲]، الگوریتمی را برای محاسبه تجزیه با عمق بهینه برای عملگرهای منطقی ارائه می‌کند، و از یک تکنیک ملاقات در وسط[۷۴] برای ارائه سرعت قابل توجهی نسبت به الگوریتم‌های جستجوی ناآگاهانه ساده استفاده می‌کند. به‌عنوان مثال، این الگوریتم عوامل عملگرهای منطقی کوانتومی متداول را در گیت‌های ابتدایی در مجموعه کلیفورد و T به دست آورده است. به طور خاص، این روش تجزیه گیت تافولی را بر روی مجموعه‌ای از گیت‌های کلیفورد و T گزارش می‌کند. این تجزیه، به یک مقدار عمق کل T برابر با ۳ دست می‌یابد، در نتیجه کاهش ۴۰ درصدی نسبت به تجزیه شناخته شده قبلی برای گیت تافولی ایجاد می‌کند. با توجه به اندازه فضای جستجو، این الگوریتم فقط برای پارامترهای کوچک مانند تعداد کیوبیت‌ها و تعداد گیت‌ها برای اجرای بهینه عملی است.

۴- مرور کلی بر سنتزهای مختلف منطقی مبتنی بر روش‌های ریاضی

در جدول (۱) خلاصه‌ای از روش‌های مختلف از الگوریتم‌های مبتنی بر ریاضی و سنتز منطقی با قابلیت تحمل‌پذیری اشکال در مدارهای کوانتومی بررسی شده‌اند.

در اکثر مقاله‌هایی که مورد بررسی قرار گرفته‌اند، از معیارهای ارزیابی تعداد CNOT و تعداد گیت‌های تک‌کیوبیتی برای یافتن مدار بهینه کوانتومی استفاده شده است.

در سنتزهایی که به دلیل قابلیت تحمل‌پذیری اشکال از کتابخانه CTL استفاده کرده‌اند، مهم‌ترین هدف کاهش تعداد گیت T و عمق T است.

۵- جمع‌بندی و پیشنهادهایی برای کارهای آتی

در این مطالعه، ابتدا مقدمه‌ای بر محاسبات کوانتومی بیان شد. سپس، مقدمه‌های بر مفاهیم اولیه محاسبات کوانتومی مطرح شد. بعد از آن، مسئله سنتز منطقی مدارهای کوانتومی مورد بررسی قرار گرفت. هر ماتریس یکانی نمایش دهنده یک گیت کوانتومی است. سنتز مدارهای کوانتومی به فرایند تبدیل یک گیت کوانتومی به یک سری گیت‌های پایه اطلاق می‌شود و یک مسئله سخت است. در این مطالعه، مروری بر روش‌های سنتز منطقی ریاضی مدارهای کوانتومی ارائه شد. روش‌های سنتز منطقی مدارهای کوانتومی به طور کلی به دو دسته روش‌های کلی و روش‌های آگاه از تحمل‌پذیری اشکال (سنتز تقریبی به کتابخانه CTL) تقسیم می‌شوند که در سال‌های اخیر روش‌های دسته دوم بیشتر

[Downloaded from kiaeee.ir on 2026-11-16]

جدول ۱: خلاصه‌ای از برخی مقالات مرتبط با سنتز مدارهای کوانتومی مبتنی بر الگوریتم‌های ریاضی منتشرشده در مدل مداری کوانتومی

مرجع	سال انتشار	نوع الگوریتم	نکته قابل‌توجه
[۲۱]	۲۰۰۱	استفاده از تجزیه QR در جبر خطی	تعداد گیت‌های CNOT در مرتبه $O(n^3 4^n)$
[۲۲]	۲۰۰۴	استفاده از Highest Lower Bound	تعداد CNOTها به $[(1/4)(4^n - 3n - 1)]$ رسید
[۲۴]	۲۰۰۴	استفاده از CSD	تعداد CNOTها به $(4^n - 2^{n+1})$ رسید
[۹]	۲۰۰۵	بهبود روش CSD	تعداد CNOTها به $\frac{1}{2}4^n - 2^n - 2$ رسید و تعداد کمتری از گیت‌های تک کیوبیتی را تولید می‌کند.
[۸]	۲۰۰۶	سنتزی مبتنی بر تجزیه CS با عنوان QSD	تولید $(23/48)4^n - (3/2)2^n + \frac{4}{3}$ تعداد گیت CNOT
[۲۶]	۲۰۱۱	Block-Based Quantum Decomposition (BQD)	ترکیبی از دو روش CSD و QSD
[۴۵]	۲۰۱۳	طراحی یک روش سنتز دقیق با توجه به کتابخانه کلیفورد و T	استفاده از کیوبیت‌های کمکی برای عملگرهای کلیفورد و T، تعداد کل گیت‌های ابتدایی این کتابخانه به‌کار رفته $O(3^{2^n} nk)$ k مؤلفه مخرج[۲۵] است)
[۵۲]	۲۰۱۳	الگوریتم Meet-in-the-Middle برای سنتز سریع مدارهای کوانتومی با عمق بهینه	از گیت‌های کتابخانه کلیفورد و T استفاده کرده است و هدف اصلی تولید مدار با تعداد حداقل گیت T است.
[۴۹]	۲۰۱۴	استفاده از رویکرد سنتز خودکار، عدم تکیه بر کتابخانه گیت عمومی و استفاده از نمودارهای تصمیم‌گیری چندمقداری کوانتومی	نتایج تجربی تایید می‌کنند که این امکان تحقق فشرده عملکرد کوانتومی مربوطه را فراهم می‌کند
[۲۷]	۲۰۱۶	IBQD	فضای جستجوی بزرگ‌تری را برای یافتن بهترین جواب ازلحاظ معیارهای مختلف سنتز مداری جستجو می‌کند و همچنین از ارزیابی معیار عمق مدار استفاده می‌کند
[۵۱]	۲۰۱۸	توسعه یک الگوریتم دقیق مبتنی بر SAT را برای بازنویسی مدار کوانتومی	کاهش تعداد گیت‌های T و به حداقل رساندن تعداد عملگرهای دوکیوبیتی (گیت‌های CNOT)
[۴۷]	۲۰۲۰	بهبود روش سنتز دقیق پیشنهاد شده توسط [۴۶] در سطح جهانی و استفاده از Quantum Multiple-Valued Decision Diagram برای نمایش ماتریس به‌صورت کارا	از گیت‌های کتابخانه کلیفورد و T استفاده کرده است و هدف اصلی تولید مدار با تعداد حداقل گیت T است.
[۲۸]	۲۰۲۲	سنتز منطقی مبتنی بر برنامه‌نویسی پویا و بهینه‌سازی شبکه منطقی	هدف اصلی کاهش عمق T
[۴۸]	۲۰۲۲	ارائه یک سنتز منطقی با قابلیت تحمل‌پذیری اشکال با استفاده از کدهای پیوسته	استفاده از معیار NNC
[۵۰]	۲۰۲۲	تکنیک تجزیه مبتنی بر QSD	ایجاد تعداد $O(\frac{3}{4}4^n)$ گیت‌های غیرکنترلی برای یک گیت ورودی n کیوبیتی و همچنین به حداقل رساندن زمان اجرای تجزیه

مورد تاکید و اهمیت هستند. به‌عنوان یک کار آتی، پیشنهاد می‌شود به روش‌های سنتز منطقی در مدل محاسبات کوانتومی یک‌طرفه پرداخته شود.

پی‌نوشت‌ها

1 Charles H. Benet
2 Paul A. Benioff
3 David Deustch
4 Richard P. Feyman
5 Moore's Law
6 Peter Shor
7 Bra/Ket
8 Transpose Conjugate
9 Inner Product
10 Outer Product
11 Qubit
12 Superposition
13 Unitary
14 Pauli
15 Identity
16 Bit Flip
17 Phase Flip
18 Hadamard gate
19 Phase rotation
20 Controlled-U
21 Controlled-NOT
22 Uniformly-controlled multiqubit gate
23 Feedback
24 Fan out
25 Clifford+T library
26 Logical level

[Downloaded from kiaeee.ir on 2026-11-16]

27 Logical depth
28 Nearest Neighbor Cost
29 T-count
30 T-depth
31 ancillaqubit
32 Multi-objective Optimization Problem
33 Object function
34 Restriction
35 feasible region
36 feasible solution
37 Optimization variables
38 Quantum Key Distribution
39 Quantum Teleportation
40 Dense Coding
41 Technology independent synthesis
42 Highest Lower Bound
43 Cosine-Sine Decomposition
44 Ruler function
45 Quantum Shanon Decomposition
46 Symmetric
47 Level
48 Block-Based Quantum Decomposition
49 Trade-off
50 Improved-BQD
51 cut enumeration
52 tree balancing
53 exclusive sum-of-products representations
54 Fault-Tolerant
55 Approximation synthesis
56 Error Threshold
57 brute force
58 physical machine description
59 kipping table algorithm
60 cache table
61 number of primitive operations
62 execution cycles on the critical path
63 Physical Design-Aware Fault-Tolerant Quantum Circuit Synthesis
64 Skipping Table Algorithm
65 Flower's algorithm
66 Tree lookup structure
67 Skip
68 Bidirectional search
69 Ring
70 Quantum Multiple-Valued Decision Diagram
71 concatenated codes
72 topological codes
73 quantum accelerator
74 Meet-in-the-middle
75 denominator exponent

مراجع

[1] Gordon E Moore, *Cramming more components onto integrated circuits*, 1965

[2] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, "Quantum Computation and Quantum Information," *Cambridge university press*, 2001.

[3] G. Benenti, G. Casati, and G. Strini, "Principles of Quantum Compuation and Information," *Basic concepts: World Scientific Publishing*, vol. 1, 2004.

[4] M. Nakahara and T. Ohmi, "Quantum Computing From Linear Algebra to Physical Realizations," *Taylor & Francis*, 2008.

[5] M. Lukac, M. Perkowski, H. Goi, M. Pivtoraiko, C. H. Yu, K. Chung, H. Jee, B. J. Kim, and Y. D. Kim, "Evolutionary Approach to Quantum and Reversible Circuit Synthesis," in *Artificial Intelligence Review.* vol. 20, pp. 361-417, 2003.

[۶] آرزو رجایی، محبوبه هوشمند، سید عابد حسینی، "مروری بر سنتز مدارهای کوانتومی با استفاده از الگوریتم‌های تکاملی"، نشریه عصر برق، دوره ۸، شماره ۱۵ (تابستان ۱۴۰۰)

[7] P .W .Shor" ,Algorithms for Quantum Computation :Discrete Logarithms and Factoring ",in Proceedings of the35 th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, 1994.

[8] P. W. Shor, "Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer," SIAM Journal on Scientic Computing, vol. 26, 1997.

[9] L. K. Grover, "A Fast Quantum Mechanical Algorithm for Database Search," in Proceedings of the 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing (STOC), 1996, pp. 212-219.

[10] V. V. Shende, S. S. Bullock, and I. L. Markov, "Synthesis of quantum-logic circuits," IEEE Trans. On CAD, vol. 25, no. 6, pp. 1000-1010, Jun. 2006.

[11] V. Bergholm, J. J. Vartiainen, M. Mottonen, and M. M. Salomaa, "Quantum circuits with uniformly controlled one-qubit gates," Physical Review A, vol. 71, no. 5, pp. 23-30, May 2005.

[12] A. U. Khalid, "FPGA Emulation of Quantum Circuits." Vol. MS thesis: McGill University, 2005.

[13] D.Maslov, G. W. Dueck, D. M. Miller and C. Negrevergne. "Quantum Circuit Simplification and Level Compaction." IEEE Transactions on CAD 27: 436-444, 2008

[14] R. Wille, and R. Drechsler," BBD-Based Synthesis of reversible logic for large functions", Proceedings of the 46th Annual Design Automation Conference, Pages 270–275, July 2009.

[15] D.M. Miller, R. Wille, and R. Drechsler," Reducing reversible circuit cost by adding lines", 40th IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic, 2010

[16] D.Maslov, and M. Saeedi, "Reversible circuit optimization via leaving the Boolean domain.", IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems 30.6, p.p 806-816,2011.

[17] D.Maslov, G. W. Dueck, D. M. Miller, and C. Negrevergne, "Quantum circuit simplification and level compaction", IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, 27(3), p.p 436-444 , 2008.

[18] G. B. Charles. H Bennet, "Quantum Cryptography: Public Key Distribution and Coin Tossing," in Proceeding of IEEE International Conference on Computer System and Signal Processing New York, 1984, pp. 175-179.

[19] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters, "Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels", Physical Review Letters ,vol ,70 .pp.1993 ,1895-1899 .

[20] C .H .Bennett and S .J .Wiesner" ,Communication via One -and Two-Particle Operators on Einstein Podolsky-Rosen states ",Physical Review Letters,vol,69.pp,2881-2884. November.1992

[21] G .Cybenko" ,Reducing quantum computations to elementary unitary operations ",Computing in Science and Engineering, vol ,3 .no,2 .cpp ,27-32 .Mar/.Apr2001 .

[22] V .V .Shende ,I .L .Markov ,and S .S .Bullock" ,Minimal universal two-qubit quantum circuits ",Physical Review A ,vol. ,69pp ,062329 -062321 Jub.2004 .

[23] C .C Paige ,and M .Wei" ,History and Generality of the CS Decomposition ".Linear Algebra and Applications303- :208 .1994 ,326

[24] M .Mottonen ,J .J .Vartiainen ,V .Bergholm ,and M .M. Salomaa" ,Quantum circuits for general multiqubit gates", Physical Review Letters ,vol ,93 .p ,130502 .Sep.2004 .

[25] M .A Nielsen ,and I .L .Chuang ",Quantum Computation and Quantum Information ,"Cambridge University Press.2010 ,

[26] M .Saeedi ,M .Arabzadeh ,M .Saheb Zamani ,and M .Sedighi, "Block-based quantum-logic synthesis ",Quantum Information and Computation J ,.vol ,11 .no ,3 .pp ,262-277 .Mar.2011 .

[۲۷] کوروش مرجوعی، محبوبه هوشمند، مرتضی صاحبالزمانی و مهدی صدیقی، "سنتز مدارهای کوانتومی با استفاده از روش مبتنی بر بلوک بهبودیافته"، نشریه مهندسی برق و مهندسی کامپیوتر ایران، ب- مهندسی کامپیوتر، سال۱۴، شماره ۳، صفحه ۲۳۹-۲۴۸، پاییز ۱۳۹۵

[28] Häner,Thomas ,and Mathias Soeken" .Lowering the T-depth of quantum circuits via logic network optimization ".ACM Transactions on Quantum Computing.2022 ,3.21-15

[29] M .Steane" ,Error correcting codes in quantum theory ",Phys. Rev .Lett ,.vol ,77 .no ,5 .pp ,793-797 .Jul.1996 .

[30] D .Bacon" ,Operator quantum error-correcting subsystems for self-correcting quantum memories ",Phys .Rev .A ,vol,73 .

[Downloaded from kiaeee.ir on 2026-11-16]

ادامه از صفحه ۳۴

[12] N. Bhusal, M. Abdelmalak, M. Kamruzzaman, and M. Benidris, “Power system resilience: Current practices, challenges, and future directions,” IEEE Access, vol.8, pp.18064–18086, 2020.
[13] J. Lu, J. Guo, Z. Jian, Y. Yang, and W. Tang, “Resilience Assessment and Its Enhancement in Tackling Adverse Impact of Ice Disasters for Power Transmission Systems,” Energies, vol.11, no. 9, 2018.
[14] H. Raoufi, V. Vahidinasab, and K. Mehran, “Power systems resilience metrics: A comprehensive review of challenges and outlook,” Sustain. Switz., vol.12, no. 22, pp.1–24, 2020.
[15] Z. Zeng, S. Du, and Y. Ding, “Resilience analysis of multi-state systems with time-dependent behaviors,” Appl. Math. Model., vol.90, pp.889–911, 2021.
[16] D. K. Mishra, M. J. Ghadi, A. Azizivahed, L. Li, and J. Zhang, “A review on resilience studies in active distribution systems,” Renew. Sustain. Energy Rev., vol.135, no. March 2020, 2021.
[17] L. Das, S. Munikoti, B. Natarajan, and B. Srinivasan, “Measuring smart grid resilience: Methods, challenges and opportunities,” Renew. Sustain. Energy Rev., vol.130, p.109918, 2020.
[18] S. S. H. Toroghi and V. M. Thomas, “A framework for the resilience analysis of electric infrastructure systems including temporary generation systems,” Reliab. Eng. Syst. Saf., vol.202, p.107013, 2020.
[19] H. Sabouhi, A. Doroudi, M. Fotuh Firuzabad, and M. Bashiri, “Electrical Power System Resilience Assessment: A Comprehensive Approach,” IEEE Syst. J., vol.14, pp.2643–2652, 2020.
[20] “The Economic Design of a Smart Microgrid Considering the Reliability Indices Using the PSO Algorithm,” kiaeee, vol.6, no. 12, pp.6–14, Aug. 2019.
[21] “Determination of Optimal Location and Size of Distribution Substations to Reduce Cost, Losses and Improve Reliability,” kiaeee, vol.7, no. 13, pp.41–51, Sep. 2020.
[22] J. Nelson, N. G. Johnson, K. Fahy, and T. A. Hansen, “Statistical development of microgrid resilience during islanding operations,” Appl. Energy, vol.279, no. July, p.115724, 2020.
[23] A. Younesi, H. Shayeghi, P. Siano, A. Safari, and H. H. Alhelou, “Enhancing the Resilience of Operational Microgrids through a Two-Stage Scheduling Strategy Considering the Impact of Uncertainties,” IEEE Access, vol.9, pp.18454–18464, 2021.
[24] S. Mojtahedzadeh, S. Najafi Ravadanegh, and M. R. Haghifam, “Microgrid-based resilient distribution network planning for a new town,” IET Renew. Power Gener., vol.15, no. 15, pp.3524–3538, 2021.
[25] B. Venkateswaran V, D. K. Saini, and M. Sharma, “Techno-economic hardening strategies to enhance distribution system resilience against earthquake,” Reliab. Eng. Syst. Saf., vol.213, no. December 2020, p.107682, 2021.
[26] J. Najafi, A. Anvari-Moghaddam, M. Mehrzadi, and C. L. Su, “An Efficient Framework for Improving Microgrid Resilience against Islanding with Battery Swapping Stations,” IEEE Access, vol.9, pp.40008–40018, 2021.
[27] H. Mehrjerdi, “Resilience improvement with zero load curtailment by multi-microgrid based on system of systems,” IEEE Access, vol.8, pp.198494–198502, 2020.
[28] S. A. Sedgh, M. Doostizadeh, F. Aminifar, and M. Shahidehpour, “Resilient-enhancing critical load restoration using mobile power sources with incomplete information,” Sustain. Energy Grids Netw., vol.26, p.100418, 2021.
[29] “Specializing in Lithium Batteries, Chargers, Solar Storage,” Electric Car Parts Company.
[30] R. Nourollahi, P. Salyani, K. Zare, and B. Mohammadi-Ivatloo, “Resiliency-oriented optimal scheduling of microgrids in the presence of demand response programs using a hybrid stochastic-robust optimization approach,” Int. J. Electr. Power Energy Syst., vol.128, no. January, p.106723, 2021.

❋❋❋

no ,1 .pp ,4013 34001-012 012 .Jan.2006 .
[31] D .Forney ,M .Grassl ,S .Guha” ,Convolutional and tail-biting quantum error-correcting codes “,IEEE Trans .On Information Theory ,vol ,53 .no ,3 .pp ,865-880 .Mar.2007 .
[32]M .Houshmand ,S .Hosseini-Khayat ,andM .M .Wilde , ”Minimalmemory,non-catastrophic,polynomial-depth quantum convolutional encoders “,IEEE Trans .On Information Theory, vol ,59 .no ,2 .pp ,1198-1210 .Feb.2013 .
[33] V .Kliuchnikov ,D .Maslov ,and M .Mosca ” ,Exact synthesis of multiqubit lifford+T circuits generated by lifford and T gates“, Quantum Information and Computation ,vol ,13 .no ,7-8 .pp. ,607-630Jul.2013 .
[34] C.Lin and A .Chakrabarti” ,FTQLS :fault-tolerant quantum logic synthesis “,IEEE Trans .On VLSI Systems ,vol ,22 .no,6 . pp ,1363 -1350 .Jun.2013 .
[35] V .Kliuchnikov ,D .Maslov ,and M .Mosca” ,Fast and clifford exact synthesis of single qubit unitaries generated by clifford and T gates “,Quantum Information and Computation ,vol,13 . no.2013 ,8–7 .
[36] Y .G .Chen ,J .B .Wang” ,Qcompiler :Quantum compilation with the CSD method “,Computer Physics Communications ,184no ,3 .pp ,853-865 .March.2013
[37] M .Whiteny” ,Practical fault-tolerance for quantum circuits“, Ph.D .Thesis ,University of California ,Berkeley.2009 ,
[38] X .Zhou ,D .W .Leung ,I .L .Chuang” ,Methodology for quantum logic gate construction “,Physical Review A ,vol,62 . pp ,052316 .October.2000
[39] A .G .Fowler ,A .M .Stephens ,P .Groszkowski” ,High-threshold universalquantum computation on the surface code “,Physical Review A ,vol ,80 .pp,052312-14–052312-1. November2009
[40] A .G .Fowler” ,Constructing arbitrary steane code single logical qubit fault-tolerant gates “,Quantum Information and Computation ,vol ,11 .no ,9-10 .pp ,873–867 .September.2011
[41] C .Dawson and M .Nielsen”,The solovay-kitaev algorithm“, Quantum Information and Computation ,vol,77.no ,5.pp–793. 1996,797
[42] V .Kliuchnikov ,D .Maslov ,and M .Mosca” ,Practical approximation of single-qubit unitaries by singlequbit quantum clifford and T circuits “,arXiv. 1212.6964:
[43]C .C .Lin, S. Sur-Kolay, and N. K. Jha, “PAQCS: Physical Design-Aware Fault-Tolerant Quantum Circuit Synthesis”, IEEE Transactions on Very Large Scale Integration (VLSI) Systems , Volume: 23, Issue: 7, July 2015
[44] A. G. Fowler, “Constructing arbitrary steane code single logical qubit faulttolerant gates,” arXiv preprint quant-ph: 0411206, 4, 2004.
[45] J. Booth, “Quantum compiler optimizations,” arXiv: 1206.3348v1, 2012.
[46] B .Giles and P .Selinger” ,Exact synthesis of multiqubit lifford+T circuits “,Physical Review A ,vol ,87 .no ,3 .p,032332 . .3102 .raM
[47] Philipp Niemann, Robert Wille, and Rolf Drechsler,” Advanced exact synthesis of Clifford+T circuits”, Quantum Information Processing, pp.19-317, 2020.
[48]Y. HWANG,” Fault-tolerant circuit synthesis for universal fault-tolerant quantum computing”,*arXiv preprint arXiv: 2022 ,2206.02691.*
[49] P. Niemann, R. Wille, and R. Drechsler,”Efficient synthesis of quantum circuits implementing Clifford group operations.” 2014 19th Asia and South Pacific Design Automation Conference (ASP-DAC). IEEE, 2014.
[50] A. M. Krol, et al. “Efficient decomposition of unitary matrices in quantum circuit compilers.” *Applied Sciences 12.2. 759. 2022*
[51] *G. Meuli, M. Soeken, GD. Micheli, “SAT-based {CNOT, T} quantum circuit synthesis”, International Conference on Reversible Computation. Springer, Cham, p. 175-188, 2018.*
[52] *M. Amy, et al.,”A meet-in-the-middle algorithm for fast synthesis of depth-optimal quantum circuits.”, IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems 32.6, p.p 818-830, 2013*

❋❋❋

[Downloaded from kiaeee.ir on 2026-11-16]