

مقاله علمي- ترويجي

# مروری بر روشهای ریاضی سنتز منطقی مدارهای کوانتومی

ارزو رجایی، گروه مهندسی کامپیوتر، واحد مشهد، دانشگاه آز اد اسلامی، مشهد، ایران، ایران, rajaei@mshdiau.ac.ir houshmand@mshdiau.ac.ir محبوبه هوشمند ً ، گروه مهندسی کامپیوتر، واحد مشهد، دانشگاه آز اد اسلامی، مشهد، ایران، hosseyni@mshdiau.ac.ir سید عابد حسینی، گروه مهندسی برق، واحد مشهد، دانشگاه آز اد اسلامی، مشهد، ایران، سید عابد مسینی، گروه مهندسی برق، واحد مشهد، دانشگاه آز اد اسلامی، مشهد، ایران، houshmand@mshdiau.ac.ir

#### چکيده

محاسبات کوانتومی یک روش جدید پردازش اطلاعات و حاصل ترکیب مکانیک کوانتومی، علوم کامپیوتر و نظریه اطلاعات کلاسیک است. یک گیت کوانتومی بهصورت ریاضی با یک ماتریس یکانی نمایش داده میشود. سنتز منطقی مدارهای کوانتومی به فرایند تبدیل یک گیت کوانتومی به یک ســری گیتهای پایه قابل پیادهسازی در فناوریهای کوانتومی گفته میشود و به دو دسته کلی مبتنی بر تجزیه و ترکیب تقسیم میگردد. در روشهای دسته نخست با بهره گیری از روشهای تجزیه ماتریسی و در روش دوم با استفاده از ضرب ماتریسی گیتها، مدارهای کوانتومی سنتز میشوند. این مطالعه به دسته نخست میپردازد که از الگوریتمهای ریاضی برای دستیابی به مشخصه نهایی مدار کوانتومی بهره گرفته میشود.

کلمات کلیدی: روش های ریاضی، سنتز مدارای کوانتومی، محاسبات کوانتومی، سنتز تحمل پذیر اشکال

## A Review on Mathematical Approaches to Quantum Circuit Synthesis

Arezoo Rajaei, Department of Computer Engineering, Mashhad Branch, Islamic Azad University, Mashhad, Iran, rajaei@mshdiau.ac.ir
 Mahboobeh Houshmand<sup>\*</sup>, Department of Computer Engineering, Mashhad Branch, Islamic Azad University, Mashhad, Iran, houshmand@mshdiau.ac.ir
 Seyyed Abed Hosseini, Department of Electrical Engineering, Mashhad Branch, Islamic Azad University, Mashhad, Iran, houshmand@mshdiau.ac.ir
 Corresponding Author

#### Abstract

Quantum computing is a new method of information processing based on the concepts of quantum mechanics which leads to strange and powerful events in the field of quantum. Each unitary matrix represents a quantum gate. Synthesis of quantum circuits refers to the process of converting a quantum gate into a series of basic gates implementable in quantum technologies and is divided into two general categories, namely decomposition and composition-based. In the first category, quantum circuits are synthesized by using matrix decomposition methods and in the second category, they are synthesized by using matrix multiplication of gates. This study deals with the first category, which uses mathematical algorithms to achieve the final characteristic of a quantum circuit.

Keywords: Mathematical approaches, Synthesis of quantum circuits, Quantum computing, Fault-tolerant synthesis



#### ۱ – مقدمه

در طول چند دههی گذشته با پیشرفت شگفتانگیز فناوری، روند کوچکسازی ترانزیستورها در ساخت تراشههای کامپیوتری پدیدار شده است، به گونهای که امروزه ریزپردازندهها دربر گیرندهی بیش از صدها میلیون ترانزیستور هستند. قانون مور بیان میکند که در هر مرامه تا دو سال تعداد ترانزیستورهای یک تراشهی الکترونیکی دو برابر میشود [1]. پیروی از قانون مور سبب میشود که اندازهی ترانزیستورها میشود [1]. پیروی از قانون مور سبب میشود که اندازهی ترانزیستورها ساخت تراشهها حاکم خواهد شد، نه قوانین کلاسیک موجود در طراحی و ساخت تراشههای امروزی. بدین منظور، دانشمندان نظریهی جدیدی تحت عنوان محاسبات کوانتومی بیان نمودند که در مقیاس بسیار کوچک، قوانین موردنظر، قوانین مربوط به مکانیک کوانتومی مستند [7]. محاسبات و فناوری اطلاعات کوانتومی علم پردازش اطلاعات توسط سیستمهای مکانیک کوانتوم است. این عرصه از علم در حقیقت شامل سه علم نظریهی اطلاعات، علوم کامپیوتر و فیزیک کوانتوم است [7–۴].

هر ماتریس یکانی نمایش دهنده ریاضی یک گیت کوانتومی است. سنتز مدارهای کوانتومی به فرایند تبدیل یک گیت کوانتومی به یک سری گیتهای پایه اطلاق میشود. مسئله سنتز و بهینهسازی مدارهای کوانتومی یک مسئله سخت است [۵]. سنتز مدارهای کوانتومی به دو دسته کلی مبتنی بر تجزیه و ترکیب تقسیم می گردد. در روشهای دسته اول با بهره گیری از روشهای تجزیه ماتریسی مدارهای کوانتومی سنتز می شوند. در روشهای دسته دوم با استفاده از روشهای جستجو (به خصوص الگوریتمهای تکاملی) اقدام به یافتن مداری متشکل از کتابخانه گیتهای موردنظر می شود که مقاله مروری [۶] به بررسی این روشها می پردازد.

ساختار ادامه این نوشته از این قرار است. در بخش ۲، پیش زمینههای موردنیاز در رابطه با محاسبات کوانتومی بیان شدهاند. در بخش ۳ کارهای مرتبط در زمینه سنتز مدارهای کوانتومی با استفاده از الگوریتمهای مبتنی بر ریاضی بررسی شدهاند. بخش ۴ به جمع بندی و پیشنهادهایی برای کارهای آتی می پردازد.

## ۲– پیش زمینه

## ۲-۱-تاریخچه محاسبات کوانتومی

محاسبات کوانتومی شاخه جدیدی از پردازش اطلاعات بر مبنای اصول مکانیک کوانتومی است. هرچند هنوز کامپیوترهای کوانتومی کاملاً عملی، ساخته نشدهاند، اما آینده کامپیوترهای کوانتومی بسیار روشن به نظر میرسد.

برای اولین بار در دهه ۱۹۷۰ و اوایل دهه ۱۹۸۰، متخصصین فیزیک و کامپیوتر از قبیل چارلز بنت<sup>۱</sup>، پل بنیوف<sup>۲</sup>، دیوید دویچ<sup>۳</sup> و ریچارد فاینمن<sup>†</sup> ایده دستگاه محاسباتی بر مبنای مکانیک کوانتومی به دلیل مواجه شدن با محدودیتهای اساسی محاسبات را مطرح کردند. آنها متوجه شدند که اگر فنّاوری طبق قانون مور<sup>۵</sup> به جلو رود، اندازه عناصر مداری که بر روی تراشههای سیلیکونی تعبیه می شود، عاقبت بیشتر از چند اتم نخواهد بود. مشکلی که در اینجا پیش می آید این است که در اندازه اتمی، قوانین مکانیک کوانتومی بر رفتار اتمها حاکم هستند، نه قوانین مکانیک کلاسیک.

در سال ۱۹۸۲، فاینمن [۷]، جزو اولین افرادی بود که مدلی انتزاعی را پیشنهاد داد که نشان میداد چگونه یک سیستم کوانتومی میتواند محاسبات را انجام دهد. سپس در سال ۱۹۸۵، دوستچ [۸]، یک مقالهای را منتشر کرد که بهصورت نظری نشان میداد هر فرآیند فیزیکی را

مي توان بهطور كامل با يک كامپيوتر كوانتومي مدل كرد.

در سال ۱۹۹۴، شور <sup>\*</sup> با کمک کامپیوترهای کوانتومی توانست روشی را برای شکستن یک مسئله مهم در نظریه اعداد- تجزیه اعداد به عوامل اول [۷] تا [۸] پیدا کند. بهعلاوه او نشان داد که مجموعهای از اعمال ریاضی که برای کامپیوتر کوانتومی طراحی شدهاند، قابلیت تجزیه اعداد بزرگ را بر روی کامپیوترهای کوانتومی، بسیار سریعتر از کامپیوترهای کلاسیک دارند. در نتیجه کشف این روش و الگوریتم جستجوی گراور [۹]، باعث شد دانشمندان زیادی به حوزه محاسبات کوانتومی علاقهمند شوند.

#### ۲-۲- اصول محاسبات کوانتومی

در این بخش، اصول محاسبات کوانتومی و تعریفهای ریاضی مربوطه موردبررسی قرار میگیرند.

## ۲-۲-۱- کیوبیت ها

حالات کوانتومی را میتوان برحسب بردارها و یا با نماد معروف تر برا/کت<sup>۷</sup> نمایش داد. کتها همانند |X| نمایشگر بردارهای ستونی هستند و عموماً برای توصیف حالات کوانتومی به کار میروند. حالت برا | |X| نمایشگر ترانهاده مزدوج<sup>۸</sup> |X| است. حالات پایه |e| < 1| را |X| میتوان بهصورت |V| و ||X| است. حالات پایه |e| < 1| و ||| < 1| میتوان بهصورت |V| و ||X| بیان کرد. هر ترکیبی از ||X| < 1| فایشگر ضرب داخلی<sup>6</sup> دو بردار است. برای نمونه چون ||e| < 1| ممود مایشگر ضرب خارجی<sup>1</sup> نمایشگر ضرب خارجی<sup>1</sup> دو بردار است. برای نمان دهنده ضرب خارجی<sup>1</sup> دو بردار است. دو بردار است. دادیم: ||X| > ||X|

یک کیوبیت<sup>۱۱</sup>، یک بردار یکه، در فضای دو بعدی مختلط است که برای این فضا بردارهای پایه مشخص که با نماد< ۱۰ و < 1 ا نمایش داده می شوند انتخاب شدهاند. بردارهای پایه < ۱۰ و < 1 ا به ترتیب همتای کوانتومی بیتهای کلاسیک ۰ و ۱ می باشند. برخلاف بیتهای کلاسیک، کیوبیتها می توانند در هر برهم نهی<sup>۱۱</sup> از < ۱۰ و < 1 همانند  $\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$ 

## $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . ۲-۲-۲-۳ گیتهای کوانتومی

اعمال کوانتومی را میتوان با شبکهای از گیتها محقق کرد. نمایش ریاضی هر گیت کوانتومی، یک تبدیل خطی است که با یک ماتریس یکانی<sup>۱۲</sup> مؤثر بر روی فضای n کیوبیتی تعریف میگردد. ماتریس U میاشد. یکانی<sup>۱۲</sup> مؤثر بر روی فضای n کیوبیتی تعریف میگردد. ماتریس U میباشد. یکانی است اگرI- UU<sup>+</sup> UU که ُل ترانهاده مزدوج ماتریس میباشد. ماتریس یکانی عمومی که بر روی n کیوبیت عمل میکند، با نماد  $U(2^n)$  نمایش داده میشود. چون هر عمل یکانی، معکوس پذیر است، هر گیت کوانتومی نیز معکوس پذیر است. بنابراین اگر خروجیهای یک گیت کوانتومی را داشته باشیم، میتوان ورودیهای متناظر با آن را بهدست آورد.

از معروفترین گیتهای تککیوبیتی، اعضای مجموعه پائولی<sup>۱۴</sup>  $P = \{I, X, Y, Z\}$ 

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

*I* تبدیل همانی<sup>۵</sup>، *X* گیت چرخش بیت<sup>۶</sup>، *Z* گیت چرخش فاز<sup>۷۱</sup>و *Y* ترکیبی از هر دو است. اثر این تبدیلات بر روی حالات پایه < ۱۰و < ۱

$$\begin{split} x : |0\rangle \to |1\rangle, |1\rangle \to |0\rangle \\ Y : |0\rangle \to i |1\rangle, |1\rangle \to -i |0\rangle \\ Z : |0\rangle \to |1\rangle, |1\rangle \to -|1\rangle \end{split}$$



انجمن مهندسین برق و الکترونیک ایران-شاخه خراسان سال فهم/شماره ۱۷/ تابستان ۱۴۰۱ (۵۷

این ماتریسها، یکانی و هرمیتی هستند. از دیگر گیتهای پرکاربرد تککیوبیتی دیگر، گیتهای دوران به دور محورهای x y و z با زاویه ۵ هستند که به ترتیب با ماتریسهای زیر نمایش داده میشوند:

$$R_{x}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & i\sin\frac{\alpha}{2} \\ i\sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \end{bmatrix}$$
$$R_{y}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & -\sin\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \end{bmatrix}$$
$$R_{z}(\alpha) = \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\alpha}{2}} \end{bmatrix}$$

ازجمله گیتهای تک کیوبیتی پر کاربرد دیگر، گیتهای هادامارد<sup>۸</sup> (H)، گیت فاز<sup>۱</sup> (P) و گیت T است. ماتریسهای مربوط به این گیتها در ادامه آورده شده است.

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ & \frac{i\pi}{2} \\ 0 & e^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, P^{\dagger} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ & \frac{-i\pi}{2} \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ & \frac{i\pi}{4} \\ 0 & e^{\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix}, T^{\dagger} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ & \frac{-i\pi}{4} \end{bmatrix}$$

اگر *U*، یک گیت تککیوبیتی، با نمایش ماتریسی 
$$U = \begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} \\ u_{10} & u_{11} \end{bmatrix}$$

باشد، آنگاه، گیت U کنترلی<sup>۲۰</sup>، گیتی است که بر دو کیوبیت اثر می کند به طوری که کیوبیت اول، کیوبیت کنترل و کیوبیت دوم، کیوبیت هدف است. اگر کیوبیت کنترلی برابر < || باشد، گیت یکانیU بر روی کیوبیت هدف اعمال می شود و اگر کیوبیت کنترل، < 0 باشد، کیوبیت هدف بدون تغییر باقی می ماند. نمایش ماتریسی این گیت به صورت زیر است:

$$Controlled - U \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{00} & u_{01} \\ 0 & 0 & u_{10} & u_{11} \end{bmatrix}$$

گیت معکوس کننده-کنترلی<sup>۲۱</sup>، CNOT، یک گیت دوکیوبیتی است. کیوبیت اول، در نقش کنترل و کیوبیت دوم در نقش هدف است. اگر کیوبیت کنترل، < 1|باشد، CNOT، کیوبیت هدف را معکوس میکند و اگر کیوبیت کنترل، < 0|باشد، کیوبیت هدف بدون تغییر خارج می شود. به عبارت دیگر، خروجی دوم، XOR کیوبیت کنترل و هدف می باشد. نمایش مداری گیت CNOT به صورت زیر است:

$$CNOT \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

شکل (۱) نمایش مداری گیت CNOT را نشان میدهد.





شکل ۱: نمایش مداری گیت CNOT

گیتهای $C^k$  بر روی k کیوبیت کنترل و یک کیوبیت هدف عمل می کنند. وقتی که تمام k کیوبیت کنترل در حالت < 1 باشند، گیت U به کیوبیت هدف اعمال می شود.

یک ماتریس مربعی، قطری نامیده میشود چنانچه درایههای خارج از قطر اصلی آن صفر باشند. یک گیت قطری که بر روی n کیوبیت اعمال میشود یک ماتریس یکانی  $2^{*n}$  قطری دارد و با نماد  $\Lambda_n$ نمایش داده میشود. یک ماتریس مربعی میتواند به ماتریسهای مربعی کوچکتری با اندازههای مساوی تقسیم شود که بلوک خوانده میشوند. اگر بلوکهای خارج از قطر اصلی صفر باشند، ماتریس قطری بلوکی خوانده میشود.

یک مالتی پلکسر کوانتومی [۱۰]، m کیوبیت هدف و n - r کیوبیت انتخاب دارد و  $2^s = r$  کیوبیت مختلف خطوط انتخاب مشخص می کنند که چه گیت کوانتومی متفاوتی به خطوط هدف اعمال شود. این مجموعه گیتها، در [۱۱] با عنوان گیتهای بهطور یکنواخت کنترلی چند کیوبیتی ام در آل ابا عنوان گیتهای مطور یکنواخت کنترلی که در آن مجموعه  $\tau$  کیوبیتهای هدف را مشخص می کند. در حالتی که در آن مجموعه تکیوبیتهای هدف را مشخص می کند. در حالتی که در آن مجموعه انتخاب بارزش ترین کیوبیتها اشد، مالتی پلکسرهای که کیوبیتهای انتخاب با در آنها که کیوبیتهای هدف را مشخص می کند. در حالتی که در آنها که کیوبیتهای انتخاب با در آنها که کیوبیتها اشد، مالتی پلکسرهای که کیوبیتهای انتخاب با در آنها که کیوبیتها استد، مالتی پلکسرهای له کیوبیتهای ایتخاب با در ترین کیوبیتها با شد، مالتی پلکسرهای له که کیوبیتهای انتخاب با در ترین کیوبیتها است.  $U_i(2^m)$ 

$$U(2^{n}) = \begin{bmatrix} U_{0}(2^{m}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & U_{2^{n-m}-1}(2^{m}) \end{bmatrix}$$
(1)

یک خط انتخاب در یک مالتی پلکسر کوانتومی همان گونه که در [۱۰] استفاده شده است، با  $\Box$  نمایش داده می شود. اگر تنها یک خط انتخاب داشته باشیم، رابطه (۱) به شکل رابطه (۲) در خواهد آمد که در این  $U(2^n) = U_0(2^{n-1}) \oplus U_1(2^{n-1})$  را با نماد  $U(2^n) = U_0(2^{n-1}) \oplus U_1(2^{n-1})$  نمایش می دهیم. اگر کیوبیت اول در حالت (0 با باشد، بر روی کیوبیت دوم  $U_0$  و اگر در حالت (1) باشد، بر روی کیوبیت دوم  $U_1$  اعمال مشده

$$U = \begin{bmatrix} U_0 & 0\\ 0 & U_1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

در حالتی که تنها یک کیوبیت هدف (با نام t) داریم و گیتهای کوانتومی اعمال شده در خط هدف  $R_p$ ,  $t = \{x, y, z\}$  باشند، مالتی پلکسر کوانتومی،  $R_p$  مالتی پلکس شده نامیده می شود.

## ۲-۲-۳- مدارهای کوانتومی

یکی از مدلهای محاسبات کوانتومی، مدل مداری از گیتهای کوانتومی است. در این مدل، محاسبات کوانتومی با مدارهای کوانتومی نمایش داده میشوند. یک مدار کوانتومی، از مجموعهای از سیمهای افقی (کیوبیتها) و یک توالی از گیتهای کوانتومی تشکیل می گردد. در این مدل، یک ثبات کوانتومی در یک وضعیت تعریف شده اولیه قرار می گیرد. وضعیت آن با یک سری اعمال یکانی (گیتها) بر روی وضعیت اولیه تغییر می کند تا به یک وضعیت نهایی برسیم. سپس وضعیت نهایی در پایههای محاسباتی اندازهگیری میشود. یک مدار کوانتومی همواره از چپ به راست ارزیابی میشود؛ بنابراین حرکت از چپ به راست در یک مدار کوانتومی به معنای حرکت به جلو در زمان است [۱۲]. محاسبات کوانتومی که با مدارهای کوانتومی مدل شده، در شکل (۲) نشان داده شده است.



شکل ۲:محاسبات کوانتومی که با مدارهای کوانتومی مدل شده است.[۲۱] مدارهای کوانتومی تفاوت بسیاری با مدارهای کلاسیک دارند از جمله: میا با با یک انتراب ناتی به آزین بر آل

- مدارهای کوانتومی فاقد هرگونه دور<sup>۲۲</sup> و گنجایش خروجی<sup>۲۴</sup> هستند.
- در مدارهای کوانتومی، تعداد کیوبیتهای ورودی با تعداد کیوبیتهای خروجی همیشه یکسان بوده و پیش از عمل اندازه گیری، می توان از حالت خروجی به حالت ورودی دست یافت.

۲-۲-۴ انواع کتابخانههای گیتهای کوانتومی

چندین کتابخانه از گیتهای کوانتومی برای سنتز مدارهای کوانتومی معرفی شدهاند که معروفترین آنها عبارتند:

- کتابخانه گیتهای پایهای که از گیتهای CNOT و کلیه گیتهای کوانتومی تک کیوبیتی تشکیل شده است.
- کتابخانه گیتهای ابتدایی که از گیتهای CNOT و گیتهای دوران تک کیوبیتی تشکیل شده است.
- T و T ،H ،CNOT و گتابخانه کلیفورد +T (CTL) که از گیتهای P ،H ،CNOT و T تشکیل شده است. این کتابخانه یک کتابخانهی تقریباً جهانی هست.
   ۲-۲-۵- معیارهای ارزیابی مدار کوانتومی

• تعداد گیتهای تک کیوبیتی و CNOT: تعداد گیتهایی که برای سنتز منطقی مورداستفاده قرار میگیرند، معیاری برای ارزیابی روشهای سنتز منطقی است. بهطور کلی بر اساس کتابخانههای تعریفشده، در مدارهای کوانتومی این هزینه شامل گیتهای تک کیوبیتی و گیت CNOT تولید شده است.

- هزینهی کل گیتها: این معیار برابر با تعداد کل گیتهای تولیدشده
   در روش سنتز منطقی مدارهای کوانتومی است.
- عمق مدار: گیتهای پایهای که در یک مدار کوانتومی میتوانند باهم اجرا شوند بهعنوان یک سطح منطقی<sup>۲۶</sup> در نظر گرفته میشوند [۱۳]. تعداد سطوح منطقی یک مدار، عمق منطقی مدار<sup>۲۷</sup> نامیده میشود. عمق یک مدار کوانتومی C، نشان دادهشده با <sub>C</sub> G، میتواند از رابطه (۳) به دست آید که در آن، <sub>C</sub> Tتعداد کل گیتها و <sub>P</sub> تعداد گیتهایی در مدار C که موازی هستند را نشان میدهد.

$$D_c = T_c - P_c \tag{(7)}$$

- هزینه نزدیک ترین همسایه (NNC): یک گیت دو کیوبیتی کوانتومی نظیر g را در نظر بگیرید که در آن کیوبیت کنترل و کیوبیت هدف به ترتیب بر روی خط کام و خط *t* ام مدار قرار گرفته است (n ) ( c , c , c ) در این صورت <sup>۲۸</sup> NNC برای این گیت به صورت تعریف می شود (فاصلهٔ بین کیوبیت های کنترل و هدف). بر این اساس، NNC برای یک مدار به صورت حاصل جمع NNC گیت ها خواهد بود.
- تعداد گیت ۲<sup>۸</sup>۲: تعداد کل گیتهای T استفادهشده در مدار کوانتوم است.

- عمق گیت <sup>۲۹</sup> T: تعداد لایههای گیت T در مدار است، جایی که یکلایه شامل عملیات کوانتومی است که میتواند بهطور همزمان انجام شود.
- تعداد کیوبیت(خطوط) کمکی<sup>۲۰</sup>: خطوط کمکی، خطوطی هستند علاوه بر ورودی و خروجی اصلی تابع موردنظر به مدار اضافه میشوند و بر مبنای کاربرد به دو دسته تقسیم میشوند:
- ۱-دسته نخست حالتی است که کیوبیتهای کمکی به مدار اضافه میشوند تا یک تابع معکوسناپذیر را به یک تابع معکوسپذیر تبدیل کنند. در این حالت میتوان حداقل و حداکثری برای مقدار کیوبیتهای کمکی موردنیاز برای معکوس کردن مدار، در نظر گرفت. ۲- دسته دوم حالتی است که مدار موردنظر معکوسپذیر است؛ به
- عبارت دیگر با همان تعداد ورودی(خروجی) میتوان مدار را سنتز کرد؛ اما کیوبیتهای کمکی به دلایل مختلفی چون کاهش هزینه کوانتومی[۱۴]، [۱۵] و کاهش عمق[۱۶] به مدار اضافه میشوند و در الگوریتمهای سنتز [۱۳] و یا بهینهسازی از آن استفاده میشود.

مثال1: در شکل(۳) یک مدار ساده ازنظر هزینه کوانتومی و نیز فشرده شده ازنظر عمق برای تمام جمعکننده نشان داده شده است[۱۷]. سطوح منطقی مدار با نقطهچین از یکدیگر جدا شدهاند. هزینه کوانتومی این مدار برابر ۶ و عمق آن معادل ۴ است. به دلیل آنکه تعداد کیوبیتهای درگیر در خط چهارم مدار برابر ۴ است، عمق ۴ در این مدار بهینه خواهد بود. NNC این مدار برابر عدد ۳ است. در این مدار یک کیوبیت کمکی برای معکوس پذیر کردن تابع استفاده شده است. تعداد خروجی اصلی این مدار ۲ است، می شوند. بهعنوان خروجی بدون استفاده در نظر گرفته می شوند.



شکل ۳:مدار ساده شده از نظر هزینه با سطوح منطقی فشرده شده برای یک تمام جمعکننده[۷۱]

#### ، ۲-۲-۶ مساله بهینه سازی چند هدفه

یک مساله بهینهسازی چندهدفه<sup>۳۱</sup> را می توان را به شکل زیر فرمول بندی کرد:

$$\begin{array}{ll} \textit{Minimize} \quad F(x) &= \left(f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)\right) \\ & \textit{with} \ x = \left(x_1, x_2, ..., x_m\right) \in X \\ \textit{subject to} \ g(x) = \left(g_1(x), g_2(x), ..., g_k(x)\right) \leq 0 \\ & x_1 \in D_1, x_2 \in D_2, ..., x_n \in D_n \end{array}$$

که در آن x برداری از m متغیر است، X فضای تصمیم گیری است، هر مؤلفه از(F(X). یک تابع هدف<sup>۲۲</sup> است و g(X) برداری از k محدودیت<sup>۲۲</sup> است که یک ناحیه ممکن<sup>۲۳</sup> را تعریف می کند. هر نقطه از  $x \in X_f$  را تعریف می کند. هر نقطه از  $x \in X_f$  یک جواب ممکن<sup>۲۵</sup> است.

طبق این تعریف، یک مسئله بهینه سازی مقید دارای مجموعه ای از متغیرها طبق این تعریف، یک مسئله بهینه سازی مقید دارای مجموعه ای از متغیرها می می شوند.  $(x_1, x_2, ..., x_m)$  می شوند. تابعی (F(t) نام تابع هدف بر روی متغیرهای بهینه سازی اعمال می شود و این تابع بایستی کمینه گردد. همچنین، مجموعه ای از قیدها می توانند به صورت تساوی ( $\geq$ یا  $\leq$ ) بر روی متغیرهای می توانند به صورت تساوی (=) و یا نامساوی ( $\geq$ یا  $\leq$ ) بر روی متغیرهای بهینه سازی اعمال می توانند به صورت تساوی (=) و یا نامساوی ( $\geq$ یا  $\leq$ ) بر روی متغیرهای به می توان



انجمن مهندسین برق و الکترونیک ایران-شاخه خراسان سال نهم/شماره۱۷/ تابستان ۱۴۰۱ <mark>۵۹</mark>

دامنههای متغیرهای  $x_1, x_2, ..., x_n$  هستند که میتوانند بهعنوان قیدهای دامنه ای (یا محدودیت) در مسئله بهینه سازی مقید بیان شوند. این نکته لازم است عنوان شود که محدودیت را میتوان در برخی موارد بهصورت قیدهای تساوی و یا نامساوی نیز بیان کرد. بهعنوان مثال، محدودیت نامنفی بودن متغیر  $X_i$  را میتوان بهصورت قید نامساوی مرد مدودیت در بهینه سازی همزمان  $X_i$  می مدر به مده مده مده مده مده به محدودیت ا

بیشتر از یک تابع هدف مختلف و گاه متضاد است. یکی از روشهای حل بهینهسازی چند هدفه، پیدا کردن مجموعهی جواب بهینه پرتو است که در آن مجموعه جوابهای غیرغالب در تمام فضای جستجو ارائه میشود. یک جواب غیرغالب خوانده میشود اگر مقدار هیچ یک از توابع هدف آن نتواند بدون خراب کردن برخی دیگر از توابع هدف بهتر شود.

#### ۳-روشهای سنتز منطقی مبتنی بر روابط ریاضی

حوزه محاسبات کوانتومی مدرن، با کشف توزیع کلید کوانتومی<sup>۲۲</sup>[۱۸]، توانایی ارسال یک بیت کوانتومی به کمک دو بیت کلاسیک و یک بیت درهم تنیدگی (مخابره از راه دور کوانتومی[۱۹]<sup>۲۸</sup>) و توانایی ارسال دو بیت کلاسیک با ارسال یک بیت کوانتومی و یک بیت درهم تنیدگی (کدگذاری چگال کوانتومی<sup>۳۱</sup> [۲۰]) آغاز شد. سپس محققین، تلاشهای عمیقتری برای ترکیب منابع مخابرات کلاسیک، مخابرات کوانتومی و درهمتنیدگی برای فرمول بندی پروتوکلهای جدید کوانتومی انجام دادند.

برای درک مفهوم سنتز در مدارهای کوانتومی می توان آن را با مسئله ی سنتز مستقل از تکنولوژی <sup>۴۰</sup> در دنیای کلاسیک همارز دانست. در دنیای کلاسیک هنگامی که در سطح بالا توصیفی از عملکرد مدار وجود داشته باشد، در اولین گام سعی می شود با استفاده از کتابخانه ی گیتهای پایه ی کلاسیک (مانند AND) این توصیف را بیان کرده و تا حد امکان با توجه به محدودیتهای مداری و بدون در نظر گرفتن بستری که مدار در آن پیادمسازی خواهد شد، آن را سادهسازی کرد. مشابه این تعریف در دنیای کوانتوم با عملگرهای کوانتومی امکان پذیر است.

همانطورکه پیشتر گفته شد، روشهای سنتز مدارهای کوانتومی به دو دسته مبتنی بر تجزیه و مبتنی بر ترکیب تقسیم میشوند. در روش مبتنی بر ترکیب از الگوریتمهای تکاملی استفاده می شود. الگوریتمهای تكاملي از روشها و عمليات ابتدايي براي حل مساله استفاده ميكنند و در طی یک سری از تکرارها به راهحل مناسب برای مسئله میرسند. این الگوریتمها غالبا از یک جمعیت حاوی رامحلهای تصادفی شروع میکنند و در طی هر مرحله تکرار سعی در بهتر کردن مجموعه راهحلها دارند. در آغاز کار تعدادی از اعضای جامعه بهصورت تصادفی حدس زده شده، سپس تابع هدف یا برازندگی برای هر یک از این اعضا محاسبه و نخستین نسل ایجاد خواهد شد. اگر هیچ یک از معیارهای خاتمه بهینهسازی دیده نشوند، ایجاد نسل جدید آغاز خواهد شد. اعضا برحسب ميزان شايستگىشان براى توليد فرزندها انتخاب مىشوند. این افراد بهعنوان والدین محسوب میشوند و بازترکیب فرزندان را تولید مینمایند. سپس تمامی فرزندها با یک مقدار معینی از احتمال، يعنى همان جهش، تغيير ژنتيكي مىيابند. اكنون ميزان شايستگي (برازندگی) فرزندان تعیین و در اجتماع جایگزین والدین شده و نسل جدید را ایجاد مینمایند. این چرخه آنقدر تکرار میشود تا یکی از معیارهای پایان بهینهسازی کسب شود. این روشها از نظر یافتن به مدار کوانتومی با کاردبرد خاص بهینه سازی شده، و امکان در نظر گرفتن همزمان چند معیار بهینهسازی حائز اهمیت هستند.

> فصل نامه عصر رو علمی

نجمن مهندسین برق و الکترونیک ایران-شاخه خراسان <mark>۶۰</mark> س**ال نهم/شمار ۱۷۰ تابستان** ۱۴۰۱

یکی از مشکلاتی که در سنتز منطقی کوانتومی مبتنی بر ترکیب وجود دارد محدود بودن تعداد کیوبیتها است، چون فضای جستجوی بسیار بزرگی برای یافتن جواب بهینه وجود دارد و ارزیابی تابع برازندگی برای هر جواب نامزد به زمان زیادی نیاز دارد، به طور یکه در پژوهشهایی که تا کنون انجام شده، این نوع سنتز روی مدارهایی با حداکثر تعداد ۵ کیوبیت جواب میدهند[۶].

با استفاده از ویژگیهای ماتریسی مدار و گیتهای کوانتومی و نیز تعریف گیتهای خاص و روشهای تجزیه آنها با توجه به روشهای تجزیه ریاضی، ماتریس مدار موردنظر به دسته ماتریسهای خاص که همان گیتهای کوانتومی هستند، تجزیه میشود.

در این بخش، مروری بر انواع مختلف روشهای سنتز مبتنی بر ریاضی صورت میگیرد.

## ۳–۱–استفاده از تجزیه QR در جبر خطی

مقاله [11] نشان میدهد که تکنیکهای استاندارد جبر خطی عددی را می توان برای نمایش محاسبات کوانتومی به عنوان دنبالهای از عملیات کوانتومی ساده که عملگرهای دادههای کوانتومی نامیده می شوند، روی تک کیوبیتهای کوانتومی استفاده کرد. درنتیجه تعداد گیتهای CNOT در مرتبه  $O(n^34^n)$  حاصل می گردد.

## ۳-۲- استفاده از بیُش ترین کران پایین

مقاله [۲۲]، مدارهای کوانتومی ارائه میدهد که یک عملگر واحد دو کیوبیتی دلخواه را تا یک فاز جهانی شبیه سازی می کند. برای چندین کتابخانه گیت کوانتومی، ثابت می کند که شمارش گیتها در بدترین و متوسط حالت بهینه است به این معنا که بیش ترین کران پایین<sup>۲۲</sup> برای تعداد CNOTها برابر با [(1–30– "4)( $\frac{1}{4})$ ] می باشد. ذخیره سازی موقت استفاده نمی شود زیرا پیاده سازی فیزیکی گران است. با مشخص شدن این حد مرزی امکان محاسبه فاصله مقادیر محاسبه شده در روشهای معرفی شده تا حالت بهینه شناخته شده تا کنون (یعنی سنتز با کم ترین تعداد CNOT) میسر شده است.

#### ۳-۳- روش تجزیه CS

تجزیه CS [۲۳] برای ماتریس دلخواه یکان <sup>n</sup>2<sup>n</sup>2<sup>n</sup> با نام *U*، با استفاده از رابطه (۲) انجام میشود که در این رابطه ماتریسهای  $I_1 L_2 L_1 g$  و  $R_1 d_2 d_1$  ماتریسهای یکانی <sup>n</sup>2<sup>n-1</sup>2<sup>n-1</sup> و C g g ماتریسهای  $R_2 e^{-1} S^{2n-1} g$  یکانی قطری با مقادیر حقیقی هستند به طوری که  $I_1 = I_1 g^{n-1}$ 

$$U = \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}$$
(\*)

سمت چپ و راست رابطه (۴)، گیتهای بهطور یکنواخت کنترلی چند کیوبیتی هستند. ماتریس میانی، ساختار یکسانی با گیت <sub>y</sub> مالتی پلکس شدهای دارد که کیوبیت هدف آن با ارزش ترین کیوبیت است. از اینرو نمایش مداری این تجزیه همانند شکل (۴)است.



شکل ۴: شکل مداری تجزیه SC [۳۲]

## ۳-۴- روش سنتز CSD

در روش معرفی شده در [۲۴] الگوریتم سنتزی تحت عنوان CSD پیشنهاد شده است که از روش تجزیه CS برای تجزیه ماتریس دلخواه یکانی(۳۰) U استفاده می کند. در این الگوریتم، تجزیه CS به صورت

بازگشتی بر روی گیتهای بهطور یکنواخت کنترلی چندکیوبیتی در رابطه (۴) اعمال میشود و تا زمانی که همه گیتها به گیتهای بهطور یکنواخت کنترلی تککیوبیتی تبدیل شوند، روند بازگشتی ادامه می یابد. روند سنتز روش CSD بهطور دقیق تر در رابطه (۵) نشان داده شده است. در این رابطه ( i)γ تابع خطکش<sup>۴۴</sup> معرفی شده در [۲۴] است. 1+( i)γ محل کم ارزش ترین بیت غیر صفر را در نمایش دودویی i نشان می دهد.

$$U(2^{n}) = F_{n}^{(n-1)}(U(2))_{(i=1)}^{(2^{n}-1)} F_{(n-?(i))}^{(n-1)}(R_{y}) F_{n}^{(n-1)}(U(2))$$
<sup>(Δ)</sup>

گیتهایی که در رابطه (۵) ظاهر شدهاند، می توانند با استفاده از رابطه (۶) تجزیه و به سه گیت با اندازههای کوچک تر و یک گیت CNOT تبدیل شوند. در این رابطه گیت CNOT با نماد C<sup>ct</sup> نشان داده شده که *C* و *t* به ترتیب محل بیت کنترلی و بیت هدف را مشخص میکنند. نمایش این تجزیه در شکل (۵) نشان داده شده است.

$$F_{n}^{n-1}(U(2)) = F_{n}^{n-2}(U(2))C^{1,n}F_{n}^{n-2}(U(2))F_{n}^{n-1}(R_{z})$$
(8)



شکل ۵: روند بازگشتی تجزیه مربوط به رابطه (۵) [۴۲]

با ادامه رابطه (۶) بهصورت بازگشتی، مداری باا $-2^n$ گیت بهطور یکنواخت کنترلی تککیوبیتی و یک گیت قطری  $\Delta_n$  بهدست میآید. گیت  $\Delta_n$  قابل تجزیه به مداری با  $2^{-2}$  گیت CNOT وگیت تککیوبیتی است[۲۵].

- <u>p</u> -			· · · · · ·	-		F
≃	_	•	•	•	Δ.	Ē
Ū-	-0-0-0-0			-		-
						1

#### شکل۶: تجزیه یک گیت قطری بلوکی با چهارکیوبیت[۵۲]

در شکل (۶) تجزیه گیت بهطور یکنواخت کنترلی تک کیوبیتی با چهار کیوبیت نشان داده شده است.

گیت  $\Lambda_n$  ظاهر شده در انتهای تجزیه گیت قطری بلوکیU، با زنجیرهای از گیت های قطری بلوکی همانند شکل(۲) قابل پیادهسازی است.



شکل ۷: تجزیه گیت قطری [۵۲]

در [۲۴] بهمنظور کاهش تعداد گیتهای CNOT، با معرفی رابطه(۷) و جایگذاری آن در رابطه (۵) و نیز ادغام گیتهای با گیتهای م

بهطور یکنواخت کنترلی مجاورشان، رابطه (۸) بهدست آمده است.

$$F_n^{n-1}(U(2)) = \Delta_n \tilde{F}_n^{n-1}(U(2)) \tag{Y}$$

$$U(2^{n}) = \Delta_{n} \tilde{F}_{n}^{n-1}(U(2)) \prod_{i=1} \tilde{F}_{n-\gamma(i)}^{n-1}(R_{y}) \tilde{F}_{n}^{n-1}(U(2))$$
(A)

همانطور که مشاهده میشود، در روش CSD با شروع از تجزیه CS و ادامه آن بهصورت بازگشتی، گیتهای بهطور یکنواخت کنترلی تککیوبیتی تولید میشوند. روش تجزیهای برای این دسته از گیتها معرفی شده است که آنها را به گیتهای CNOT و گیتهای تککیوبیتی (کتابخانه گیتهای پایهای) تبدیل میکند. با ارائه راهکارهایی هزینه مدار تولیدشده با کاهش تعداد گیتها بهبود پیدا میکند.

CSD نمایشی از تجزیه مدار سه کیوبیتی با استفاده از روش سنتز CSD در انتهای در شکل (۸) نشان داده شده است. زنجیره گیتهای  $R_z$  در انتهای مدار تجزیه گیت قطری  $\Delta_3$  را نشان میدهد. نماد  $\tilde{U}$  در این شکل به منظور نمایش گیتهای هدف در گیتهای  $\tilde{F}_t^m(U(2))$  که در بالا معرفی شدند به کار رفته است.

تعداد CNOTهای هر گیت بهطور یکنواخت کنترلی تک کیوبیتی برابر با 1-1-2 و تعداد تک کیوبیتیهای آنها برابر با 1-2 است. برای محاسبه تعداد CNOT های کل تولیدشده در این روش کافی است تعداد گیتهای بهطور یکنواخت کنترلی تک کیوبیتی را در تعداد گیت CNOT هر کدام ضرب کرده و عدد به دست آمده را با تعداد گیت CNOT گیت قطری تولیدشده در انتهای مدار جمع کنیم تا هزینه نهایی مدار حاصل شود. با بهینه سازی که در [17] معرفی شده، تعداد نهایی مدار حاصل شود. با بهینه سازی که در [17] معرفی شده، تعداد نهایی مدار حاصل شود. با بهینه سازی که در این CNOTها یک واحد و تعداد تک کیوبیتی ها n واحد بیشتر کاهش یافته و به ترتیب به صورت  $2 - 2^{-n} - 2^{-n} + 2^{-n}$ 

#### QSD - ٥- روش سنتز

در مقاله [۱۰]، ماتریسهای قرارگرفته در سمت راست و نیز سمت  $F_{\tau}^{1}(U(2^{(n-1)}))$  نشان داد. چپ رابطه (۵) را میتوان با گیت ( $F_{\tau}^{1}(U(2^{(n-1)}))$  نشان داد. بهعلاوه، ماتریس میانی نشان دادهشده در این رابطه برابر است با گیت  $F_{1}^{n-1}(R_{y})$  بدین ترتیب رابطه (۵) در نمایش گیتی خود میتواند بهصورت رابطه (۹) نوشته شود.

$$U(2^{n}) = F_{\tau}^{1}(U_{1}(2^{n-1}))F_{1}^{n-1}(R_{y})F_{\tau}^{1}(U_{2}(2^{n-1}))$$
(9)

در[۸] نشان دادهشده است که هر ماتریس قطری بلوکی میتواند به رابطه (۱۰) تجزیه شود.

$$\begin{bmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta^{\dagger} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix}$$
(1.5)

ماتریس<br/>های Vو $\Delta$ وVبه دست میآیند. <br/>  $U_1$ از ال $U_2$ مVماتریس ما<br/>ی $U_1 U_1^{\dagger} = V \Lambda^2 V^{\dagger}$ 

و 
$$V$$
 و  $V$  میتوانند از  $U_1$  و  $U_2^{\dagger}$  با روش استاندارد قطریسازی [۲۵]  
استخراج شوند. همچنین  $U_1 = \Delta V^{\dagger} U_2$  . در رابطه (۱۱) نمایش این  
رابطه با گیت، نشان داده شده است.

$$F_{\tau}^{1}\left(U(2^{n-1})\right) = U\left(2^{n-1}\right)F_{1}^{n-1}\left(R_{z}\right)U\left(2^{n-1}\right)$$
<sup>(11)</sup>



عمل تجزیه این ماتریسها در شکل (۹) نشان داده شده و این عمل تجزیه دیمالتیپلکس کردن یک مالتیپلکسر نامیده شده است.



شکل ۸: مثالی از تجزیه گیت سه کیوبیتی با روش DSC [۴۲]



شکا ۱۱: تجزیه گیت، قطری بلوکی بر روی دو کیوبیت [۸] با جایگذاری رابطه (۱۱) در رابطه (۹) رابطه (۱۲) به دست می آید که عمل QSD <sup>۵۵</sup> را نشان میدهد. این رابطه بازگشتی تا ادامه داده می شود و مدار بهینه بهدست آمده برای (4)U در [۲۴] با سه گیت CNOT، بهجای آن قرار داده می شود.

$$\begin{split} U(2^{n}) = U(2^{n+1})F_1^{n+1}(R_2)U(2^{n+1})F_1^{n+1}(R_2)U(2^{n+1})F_1^{n+1}(R_2)U(2^{n+1}) \quad (17) \\ \text{cr mXL (1), the last of the last of last$$

با تعمیم شکل (۱۱) و افزودن کیوبیت انتخاب به دو طرف رابطه میتوان به شکل (۱۲) رسید.



شکل ۱۲: تجزیه بازگشتی گیت قطری بلوکی <sub>\*</sub>R[۸] با جایگذاری بازگشتی شکلها در یکدیگر میتوان به تجزیه نهایی



شکل ۱۴: مدار حاصل از سنتز سه کیوبیتی با روشDSC [۶۲] .

فصل نامه عرم رو علمی انجمن مهندسین برق و الکترونیک ایران - شاخه خراسان ۱۴۰۱ سال نهم / شماره ۱۷ / قابستان ۱۴۰۱

گیت قطری بلوکی R <sub>k</sub> رسید. مدار نهایی تنها از گیتهای CNOT و گیتهای تککیوبیتی تشکیل شده است. مثالی از این تجزیه برای با ۴ کیوبیت در شکل (۱۳) نشان داده شده است.

لازم به ذکر است که تجزیه نشان داده شده در شکل(۱۳) و حالتهای تعمیم یافته آن متقارن<sup>۴۶</sup> است. بنابراین با جایگذاری وارون تجزیه بهجای گیت قطری بلوکی دوم در شکل(۱۳) (همانطورکه در مدار سمت راست مشاهده میشود)، میتوان تعدادی گیت CNOT را در هر مرحله جایگذاری حذف کرد. تعداد CNOT های نهایی برای گیت قطری بلوکی  $R_k$  میاشد که m تعداد کیوبیتهای انتخاب را در گیت قطری بلوکی مورد نظر نشان میدهد.

موضوع مهمی که باقی میماند این است که سطحی<sup>۲۷</sup> انتخاب شود که در آن بازگشت مجدد متوقف شود و موارد پایانی با تکنیکهای هدف خاص رسیدگی شود.



شکل ۱۳: تجزیه گیت قطری بلوکی بر ۴ کیوبیت [۸]

بنابراین، فرض می شود <sub>ز</sub> C حداقل تعداد گیتهای CNOT مورد نیاز برای پیاده سازی یک عملگر یکانی j کیوبییتی با استفاده از برخی از الگوریتمهای سنتز مدار کوانتومی باشد. با توجه به شکل (۱۰)، رابطه (۱۳) برای <sub>ز</sub> C تعریف می شود:

$$C_j \le 4C_{j-1} + 3 \times 2^{j-1} \tag{17}$$

اکنون می توان این روش سنتز را به صورت بازگشتی اعمال کرد که با تکرار نابرابری فوق مطابقت دارد. اگر عملگرهای I- کیوبیتی ممکن است با استفاده از CNOT پیادهسازی شوند، می توان نابرابری زیر را برای از طریق القاء اثبات کرد.

$$C_n \le 4^{n-l} (C_l + 3 \times 2^{l-1}) - 3 \times 2^{n-l}$$

درمقاله [۸]، l = 1 و  $C_l = 0$  برای عملگرهای تک کیوبیتی و 2 = l e و  $C_l = 1$  و  $C_l = 3$ 

با بهینهسازیهایی که بر روی این روش انجام میشود، یعنی با حذف  $S(-l^{n-l}-1)$  و اضافه کردن  $1-2^{n-l}$  در رابطه بازگشتی(۱۴) با در نظر گرفتن حالت l=2، l=2 تعداد CNOT ها برای روش QSD در رابطه (۱۵) بهدست میآید.

$$C_n \le \left(\frac{23}{48}\right) 4^n - \left(\frac{3}{2}\right) 2^n + \frac{4}{3} \tag{10}$$

فرض میشود <sub>ز</sub> 5 حداقل تعداد گیتهای تککیوبیتی مورد نیاز برای پیادهسازی یک عملگر یکانی *j* کیوبییتی با استفاده از برخی از الگوریتمهای سنتز مدار کوانتومی باشد، رابطه بازگشتی (۱۶) برای S تعریف میشود:

$$S_j \le 4S_{j-1} + 3 \times 2^{j-1} + 1 \tag{17}$$

اکنون میتوان این روش سنتز را به صورت بازگشتی اعمال کرد که با تکرار نابرابری فوق مطابقت دارد. اگر عملگرهای *ا-* کیوبیتی ممکن است با استفاده از <u>S</u> عدادگیتهای تککیوبیتی پیادهسازی شوند، میتوان نابرابری زیر را برای S از طریق القاء اثبات کرد.

$$S_n \le 4^{n-l} (S_l + 3 \times 2^{l-1} + 1) - 3 \times 2^{n-1} - 1$$

در این قسمت 2=1 و  $C_1=7$  برای عملگرهای تک کیوبیتی در نظر گرفته است. بهطور مشابه و با انجام بهینه سازی هایی بر روی رابطه بازگشتی (۱۷)، تعداد گیت های تک کیوبیتی برای روش QSD در رابطه (۱۸) به دست می آید.

$$S_n \le \frac{17}{24} 4^n - \frac{3}{2} 2^n + \frac{2}{3} \tag{11}$$

مقاله [۸]، توضیح مختصری درباره معیار NNC داده است. همه گیتهای CNOT که از این سنتز به دست آمده اند، دو کیوبیتی هستند. گیتهای که کیوبیت هدف و کنترل در مجاورت همدیگر قرار دارند یعنی مقدار فاصله شان (x) برابر با یک است، مقدار NNC شان برابر با یعنی مقدار فاصله شان (x) برابر با یک است، مقدار کا م شان برابر با مول k وجود دارد، پس NNC هر کدام از این نوع گیت CNOT برابر k-1 می باشد. درنهایت هزینه NNC کل مدار برابر با مجموع NNC تک R

#### ۳-۶- روش سنتز BQD

در مقاله [۲۶]، با ترکیب دو روش GSD و CSD روش جدیدی به نام BQD<sup>۲۸</sup> ارائه شده که موازنهای<sup>۴۹</sup> را بین تعداد گیتهایCNOT در این روش، ابتدا سنتز و تعدادگیتهای تککیوبیتی فراهم میکند. در این روش، ابتدا سنتز yGSD برای سنتز ماتریس ( $U(2^n)$  مورد استفاده قرار میگیرد، سپس در ادامه با تعیین سطح تجزیه  $I(z \le I)$ ،سنتز GSD متوقف شده و ماتریسهای باقیمانده در روند الگوریتم بازگشتی سنتز با شده از روش CSD سنتز شده و بهینهسازیهایی که در روند سنتز استفاده از روش CSD سنتز شده و بهینهسازیهای اعمال شده بدین لحاظ شدهاند، جایگزین میشوند. بهینهسازیهای اعمال شده بدین ترتیب هستند که میتوان گیتهای قطری  $\Lambda$  را که در ماتریسهای یکانی I کیوبیتی سنتز شده به روش CSD تولید میشوند از خطوط کنترلی گیتهای R مالتیپلکس شده (y,z) عبور داده و با

 $\begin{array}{c} \hline R_1 \\ \hline R_2 \\ \hline R_2 \\ \hline R_3 \\ \hline R_4 \\$ 

#### شکل ۱۵: مدار حاصل از سنتز پنج کیوبیتی با روش DQB با فرض سطح تجزیه [۶۲]

در این مقاله، مدار حاصل از سنتز یک ماتریس یکانی l کیوبیتی به روش CSD که گیت قطری از آن مدار حذف شده است با نام بلوک پایه l کیوبیتی بیان شده است. در این مقاله، یک بلوک پایه l کیوبیتی با نماد  $(^{(1)})$ مشخص میشود. به طور مثال در شکل  $(^{(1)})$ ، بلوک پایه سه کیوبیتی به صورت  $(^{(2)})$  مشخص شده است. شکل نتیجه حاصل از سنتز گیت دلخواه پنچ کیوبیتی را با روش BQD با فرض سطح تجزیه  $[^{(1)}]$  نشان میدهد. در شکل  $(^{(1)})$  هر یک از بلوکهای پایه سه کیوبیتی با C نمایش داده میشوند.

## ۳-۷- روش سنتز IBQD

در [۲۷]، یک روش بهبود یافته پارامتری برای سنتز مدارهای کوانتومی مبتنی بر روش BQD با نام <sup>۵۰</sup> IBQD معرفی شد. روش IBQD یک روش پارامتری و کلی سنتز است که روشهای پیشین از جمله CSD،QSD و BQD حالتهای خاصی از آن میباشند. دو تابع هزینه کوانتومی و عمق برای مدارات تولیدشده در فضای جواب توسط این روش بر حسب پارامترهای روش محاسبه و سنتز با یافتن جوابهای بهینه مربوط به موزینه کوانتومی و عمق مدار ایجاد میکند. برای سنتز چهارکیوبیتی، IBQD در مقایسه با روشهای QSD ، QSD و BQD کمترین هزینه کوانتومی را تولید میکند. نقاط کمینه برای هزینه عمق مدار در حالتی که روش IBQD است، روش QSD است، رخ میدهد. همچنین با

توجه به این که مساحت مدار تابعی از معیار هزینه کلی گیت و زمان اجرای مدار تابعی از عمق مدار است، لذا مجموعه جوابهای به دست آمده در روش IBQD موازنهای بین مساحت و زمان اجرای مدارهای سنتز شده ایجاد میکنند.

به علاوه، روش IBQD مىتواند نتايج بهترى از لحاظ هزينه كوانتومى و عمق مدار نسبت به روش BQD توليد كند.

۸-۳– سنتز مدار کوانتومی مبتنی بر بهینهسازی شبکه منطقی

در مقاله [۲۸]، از طریق بهینهسازی شبکه منطقی برای کاهش دادن معیار عمق T مدارهای کوانتومی استفاده کرده است. عمق ضربی یک شبکه منطقی بر روی گیتهای پایه  $\{-, \oplus, \wedge\}$ ، بزرگترین تعداد گیتهای  $\land$  در هر مسیر از ورودی اولیه تا خروجی اولیه در شبکه است. به این منظور یک الگوریتم سنتز منطقی مبتنی بر برنامهنویسی پویا را برای کاهش عمق ضربی شبکههای منطقی را پیشنهاد داده است که از شمارش برش<sup>(۵</sup>، تعادل درخت<sup>۲۸</sup> و نمایشهای مجموع حاصل ضرب انحصاری(ESOP) <sup>۲۵</sup> استفاده میکند. همچنین این الگوریتم برای رمزنگاری و محاسبات کوانتومی کاربرد دارد، که در آن کاهش معیار عمق ضربی مستقیماً به کاهش معیار عمق T مدار کوانتومی مربوطه ترجمه میشود. نتایج تجربی این مقاله بهبودهایی در معیار عمق T را نسبت به روشهای پیشرفته بهینه سازی شده با دست در تعدادی از مدارهای کوانتومی به عنوان مثال، SHA ، AES و محاسبات ممیز شناور نشان می دهد.

## ۹-۳- سنتز مدار کوانتومی با قابلیت تحمل پذیری اشکال

از آنجا که سیستمهای کوانتومی بیشتر از محاسبات کلاسیک در معرض خطا هستند، مدارهای کوانتومی با قابلیت تحمل پذیری اشکال <sup>۹۴</sup>برای پیادهسازی عملی موردنیاز هستند.

طبق تعریف سنتز تحمل پذیر اشکال، در ابتدا عملگر یکانی ورودی با کمک یکی از روشهای معمولی سنتز، تجزیه میشود و پس از آن گیتهای تککیوبیتی تولیدشده به مجموعهی CTL تجزیه میشوند. بسیاری از کدهای تصحیح اشکال کوانتومی [۲۹] تا [۳۲] برای ممکن ساختن محاسبات تحمل پذیر اشکال ارائه شدهاند که از گیتهای کتابخانه حاوی گیتهای کلیفورد و T استفاده میکنند. برخی پژوهشهای اخیر در حوزه سنتز کوانتومی نیز به سنتز کوانتومی باهدف تحمل پذیری اشکال می پردازند. در این پژوهش های [۳۳] تا [۳۶] سنتز منطقی مدارهای کوانتومی عمدتاً با استفاده از کتابخانه گیتهای کلیفورد و T صورت می گیرند.

همان طور که گفته شد، کتابخانه کلیفورد و T یک کتابخانه ی تقریباً جهانی هست. یکی از راهکارهایی که برای کاهش محدودیت این کتابخانه ارائه شده است، گسترش آن است[۳۴]، یعنی افزودن گیتهای جدید به کتابخانه. این عمل سبب میشود در صورت وجود این گیتها در مدار کوانتومی بدون خاصیت تحمل پذیر اشکال نیازی به سنتز آن نباشد. همین امر سبب بهبود هزینههای این سنتز خواهد شود. حتی باوجود گسترش کتابخانه بازهم امکان تجزیه ی دقیق یک گیت دلخواه به گیتهای کلیفورد و T، وجود ندارد.

#### CTL انواع سنتز بر پایه کتابخانه −۹–۳

سنتزهای مختلفی که بر روی کتابخانه CTL انجام شدهاند، به دو دسته تقسیم می شوند:

سنتز تقریبی<sup>هه</sup>: در سنتز تحملپذیر اشکال بهطور معمول تجزیهی نهایی به صورت تقریبی از عملگر یکانی دلخواه *U* بیان می شود. در این حالت عملگر تجزیهی عملگر یکانی دلخواه *U* بهصورت زنجیرهای از گیتها طبق (۱۹) نمایش داده می شود، به نحوی *V* نزدیک ترین پاسخ به عمگر *U* باشد.



انجمن مهندسین برق و الکترونیک ایران-شاخه خراسان سال نهم/شیماره ۱۷/ تابسیتان ۱۴۰۱ <mark>۶۳</mark>

 $V \approx U = g_0 g_1 g_2 \dots g_n \tag{19}$ 

فاصله ای که در انتها U و V با یکدیگر دارند، آستانه ی خطا<sup>عه</sup> (3) نامیده می شود. 3 یک مقدار تجربی است و برمبنای کاربرد تعریف می شود [۳۹–۳۷].

راه حلی برای مسئله سنتز تقریب مدار تک کیوبیتی در [۴۰] با استفاده از جستجوی ناآگاهانه <sup>۵۷</sup> برای یافتن مدارهای بهینه پیشنهاد شد. با این حال، جستجوی ناآگاهانه به زمان اجرای نمایی نیاز دارد و به نظر میرسد که منابع محاسباتی کلاسیک برای مقادیر خطای تقریبی (٤) کمتر <sup>۴</sup>-۱۰ به آخر میرسد. دقت تقریب را میتوان با استفاده از الگوریتم  $O\left(\log^{3.97}\left(\frac{1}{s}\right)\right)$ 

و با زمان اجرای
$$\left( \frac{1}{arepsilon} 
ight)$$
بهبود بخشید.

در [۲۴]، الگوریتمی همراه با پیادهسازیاش که تقریبهای بهینه T، دورانهای Z تککیوبیتی را با استفاده از مدارهای کوانتومی متشکل از گیتهای Clifford+T پیدا میکند، ارائه شده است. الگوریتم پیشنهادی قادر به مدیریت اشکال در تقریب تا اندازه ۱۰<sup>-۱</sup> است که منجر به طرحهای مدار تککیوبیتی بهینه مورد نیاز برای پیادهسازی الگوریتمهای کوانتومی مقیاس پذیر می شود.

در مقاله[۳۴]، یک روش کارا برای سنتز مدار کوانتومی باقابلیت تحمل پذیری اشکال ارائه شده است. ورودی این سنتز یک مدار کوانتومی غیر FT و خروجی آن یک مدار FT بهینه شده برای شش <sup>۸۰</sup> PMD مختلف است و همچنین از الگوریتم SKA <sup>۹۵</sup> و جدول کش برای گردآوری دادههای کوانتومی استفاده کرده است. برای ارزیابی این سنتز از دو معیار هزینه استفاده می شود: تعداد عملیات اولیه<sup>۶۱</sup> (ops) و چرخههای اجرای در مسیر بحرانی<sup>۶۲</sup> (چرخه). نتایج نشان میدهد که با توجه به PMDهای مختلف بهطور متوسط هزینه ۵۸٬۱ ops درصد تا ۸۷٫۰ درصد و هزینه چرخه بین ۴۲٫۸ تا ۷۶٫۴ درصد کاهش می یابد. در مقاله [۴۳]، مدارهای کوانتومی از آبشاری از گیتهای کوانتومی تشکیل شدهاند. در یک مدار منطقی کوانتومی ناآگاه از طراحی فیزیکی، فرض می شود که یک گیت بر روی مجموعه دلخواه کیوبیتها، بدون در نظر گرفتن مکان فیزیکی کیوبیتها، عمل میکند. با این حال، درواقعیت، کیوبیتهای فیزیکی باید در یک شبکه قرار گیرند. هر گره از شبکه، یک کیوبیت را نشان میدهد. این شبکه یک معماری کامپیوتر کوانتومی را پیادهسازی میکند. یک محدودیت فیزیکی وجود دارد که اغلب اعمال میشود، که گیتهای کوانتومی فقط میتوانند روی کیوبیتهای مجاور در شبکه کار کنند. بنابراین، اگر کیوبیتهای مدار منطقى مجاور نباشند، بايد يك كانال ارتباطي ساخته شود. اين مقاله، ابزاری به نام سنتز مدار کوانتومی تحمل پذیر اشکال آگاه از طراحی فیزیکی (PAQCS)<sup>۳</sup>را معرفی میکند. این روش شامل دو الگوریتم است: یکی برای قرار دادن کیوبیت فیزیکی و دیگری برای مسیریابی ارتباطات. با كمك این دو الگوریتم، سربار تبدیل یک مدار منطقی به فیزیکی به طور متوسط ۳۰٫۱ درصد نسبت به کار قبلی [۳۴] کاهش می یابد. الگوریتمهای بهینهسازی در PAQCS بر روی مدارهای پیادهسازی شده با استفاده از عملیات کوانتومی که توسط دو توصیف مختلف ماشین فیزیکی کوانتومی و سه کد تصحیح خطای کوانتومی پشتیبانی میشوند، ارزیابی میشوند. آنها تعداد عملیات اولیه را ۱۱/۵٪ -۴۸/۶۶ و تعداد چرخه های اجرا را ۱۶/۹٪ -۲۹/۴ کاهش میدهند. یکی از معروفترین الگوریتمهایی که در سنتز تقریبی استفاده میشود، الگوريتم STA <sup>41</sup> است. الگوريتم STA بهبود يافته الگوريتم فلور<sup>64</sup> است که در تعریف ۲-۱ بیان شده است.

> فصل نامه عصر رو علمی

جمن مهندسین برق و الکترونیک ایران-شاخه خراسان <mark>۶۴</mark> سال **نهم/شماره/۱۷ تابستان ۱۴۰۱** 

**تعریف۲ –۱**: الگوریتم فلور برای تخمین گیت تک کیوبیتی ورودی بهتوالی از گیتهای تک کیوبیتی مجموعه یمرجع 5 استفاده می شود. در این الگوریتم در ابتدا برای گیت یکانی ورودی، توالی از گیتهای مجموعه یمرجع با طول مشخص، که معمولاً ۱۵ است، تعیین و در جدولی ذخیره می شود. در گام بعد برای تجزیه ی گیت یکانی با طول ۱+۸ با کمک ساختار جستجوی درختی<sup>35</sup> در جدول به دست آمده، در میان تجزیه های با طول ۸ جستجو می کند. در این جستجوی درختی از تجزیه ی مقادیر محاسبه شده پرش<sup>74</sup> می کند. در صورتی که تجزیه ی جدیدی محاسبه شود به مجموعه گیت به دست آمده افزوده خواهد شد. انجام جستجوی درختی سبب افزایش نمایی زمان اجرای الگوریتم می شود [۴۴].

در الگوریتم STA برای کاهش زمان جستجو در جدول موجود چندین راهکار ارائه شده است:

۱- جستجوی دوطرفه<sup>۸</sup>: در این حالت دو جستجوی موازی از ابتدای جدول تا وسط آن و دیگری از وسط جدول تا انتهای آن انجام می شود. این روش جستجو سبب کاهش زمان اجرا به نصف زمان اجرای الگوریتم فلور می شود [۴۵].

۲- افزایش دقت جستجو در نخستین مرحله: این افزایش دقت سبب می شود زمان یافتن عملگرهای یکانی در جستجوهای بعدی کاهش یابد [۴۵].

با وجود این راه کارها برای کاهش زمان اجرای این الگوریتم، بازهم زمان اجرای آن به صورت نمایی است. کم بودن رشد تعداد گیت خروجی با کاهش آستانهی خطا، مزیت این الگوریتم نسبت به الگوریتم SKA است. در مقابل، نمایی بودن زمان اجرا عیب این الگوریتم است [۴۵]. مرتبهی محاسبه شده برای تولید تعداد گیت خروجی، از مرتبهی O (109<sup>5/029</sup>) است [۴۴].

سُنتز دقیق: به صورت تجزیهی دقیق حالتهایی از ورودی به کتابخانهی CTL بیان میشود.

در [47]، یک هم ارزی از مجموعه یکانی های قابل محاسبه توسط مدارها بر روی CTL و مجموعه یکانی هایی برروی حلقه  $\left[1,\sqrt{2},i\right] \mathbb{Z}^{8}$ ، در حالت تک کیوبیتی نشان داده شده است. سپس از یک الگوریتم سنتز کارآمد، با تضمین بهینه بودن دقیق بر روی تعداد گیت های هادامارد و T استفاده شده است. حدس زده می شود که این نوع همارزی در حالت *n* کیوبیتی هم برقرار است.

در [۴۶]، رویکرد در [۴۲] را به گیتهای چند کیوبیتی گسترش داده و ثابت می شود که یک ماتریس یکانی n کیوبیتی نمایش دقیقی بر روی مجموعه گیت CTL با کیوبیتهای کمکی محلی دارد، اگر و تنها اگر ورودیهای آن در حلقه  $[1/\sqrt{2}, i]$  یا شند. این روش از تجزیه به ماتریسهای ۱ و ۲ سطحی استفاده می کند، که در آن همیشه یک کیوبیت کمکی کافی است. اگر ورودیهای ماتریس روی n کیوبیت به صورت

$$\frac{a+b\sqrt{2}+i(c+d\sqrt{2})}{\sqrt{2}^{k}}$$

باشند، آنگاه این الگوریتم به کران بالایی از تعداد گیتهای (O (3<sup>2m</sup> nk درد، برای سنتز کردن این گیتهایی که با بهینه بودن فاصله زیادی دارد، منجر می شود.

در مقاله [۴۷]، به بررسی مشکلات موجود در روش سنتز ارائه شده در مقاله [۴۶] میپردازد و سعی در بهبود آن در سطح جهانی دارد و از نمودار تصمیم گیری چند مقداری کوانتومی<sup>۷۰</sup> برای نمایش ماتریس بهصورت کارا استفاده می کند. همچنین از گیتهای کتابخانه کلیفورد و T استفاده کرده است و هدف اصلی تولید مدار با حداقل تعداد گیت

T است.

مقاله [۴۸]، یک الگوریتم سنتز مدار کوانتومی را برای اجرای محاسبات کوانتومی با قابلیت تحمل پذیری اشکال جهانی بر اساس کدهای پیوسته<sup>۲۷</sup> ارائه میدهد. برای تحقق محاسبات کوانتومی تحمل پذیر اشکال، باید پروتکلهای کوانتومی تحمل پذیر به مدارهای کوانتومی قابل اجرا بر اساس معیار نزدیک ترین همسایه (NNC) تبدیل شوند. برخلاف کدهای توپولوژیکی<sup>۲۷</sup> که اساساً مبتنی بر عملیات محلی تعریف می شوند، برای کدهای پیوسته، می توان مدارهای متشکل از عملیات محلی را با اعمال سنتز مدار کوانتومی به دست آورد. با این حال، با سنتز مدار کوانتومی موجود توسعه یافته برای الگوریتمهای محاسباتی کوانتومی معمولی، ممکن است قابلیت تحمل پذیری اشکال پروتکل در مدار نهایی حفظ نشود. علاوه بر این، باید روش جدیدی برای پیاده سازی مدار کوانتومی محاسبات کوانتومی تحمل پذیر اشکال

۳–۱۰– سنتز کارای مدارهای کوانتومی در پیادهسازی عملگرهای گروه کلیفورد

در مقاله [۴۹]، یک رویکرد سنتز خودکار برای مدارهای کوانتومی که عملگرهای گروه کلیفورد را پیادهسازی می کنند، ارائه شده است. این مدارها برای بسیاری از کاربردهای کوانتومی مانند مدارهای تثبیت کننده، مخابره از راه دور کوانتومی و غیره ضروری هستند و جنبههای اصلی عملکرد کوانتومی را پوشش می دهند. روش ارائه شده، برخلاف رویکردهای قبلی برای سنتز، از تکیه بر یک کتابخانه گیت عمومی اجتناب می کند و در عوض، از اثرات ویژه عملگرهای گروه کلیفورد در ماتریس یکانی که باید سنتز شود، بهره می برد. علاوه بر این، نمودارهای تصمیم گیری چندمقداری کوانتومی برای نمایش کارآمد این ماتریسها استفاده می شود. نتایج تجربی تایید می کنند که این رهیافت، امکان تحقق فشرده عملکرد کوانتومی مربوطه را فراهم می کند. کار آینده بر گسترش روش پیشنهادی برای رسیدن به به عملکرد کوانتومی عمومی تر متمرکز است.

**۳–۱۱– سنتز کارای ماتریسهای یکانی در کامپایلرهای مدار کوانتومی** تجزیه یکانی یک روش پرکاربرد برای نگاشت الگوریتمهای کوانتومی به مجموعهای دلخواه از گیتهای کوانتومی است. اجرای کارآمد این تجزیه امکان ترجمه گیتهای یکانی بزرگتر به عملگرهای کوانتومی ابتدایی را فراهم میکند، که کلید اجرای این الگوریتمها در رایانههای کوانتومی موجود است. همچنین تجزیه میتواند بهعنوان یک روش بهینهسازی تهاجمی برای کل مدار و همچنین برای آزمایش بخشی از یک الگوریتم بر روی یک شتابدهنده کوانتومی<sup>۲۲</sup> استفاده شود. برای انتخاب و اجرای الگوریتم تجزیه، کیوبیتهای کاملی در نظر گرفته شدهاند.

مقاله [۵۰]، تکنیک تجزیه خود را براساس QSD قرار می دهد که تعداد  ${4 \choose 4}$  [۵۰]، تکنیک تجزیه خود را برای یک گیت ورودی n کیوبیتی ایجاد می کند. مدارهای حاصل تا ۱۰ برابر کوتاهتر از سایر روشها در این زمینه هستند. در مقایسه این روش با ابزار Qubiter نشان داده شده این زمینه هستند. در مقایسه این روش با ابزار OUD و نشان داده شده ایت که این پیادهسازی مدارهایی با نصف تعداد گیتهای CNOT و یک سوم طول کل مدار تولید می کند. علاوه بر آن، سرعت آن نیز تا ۱۰ برابر بیشتر است. برابر بیشتر است. بیشتر است. بیشتر بهینه سازی ها برای بهره بردن از ساختار اساسی برابر بیشتر است. بیشتر بهینه مازی ها برای بهره بردن از ساختار اساسی برابر رابر ایت رابرای مدارهای و همچنین به حداقل رساندن زمان اجرای تجزیه پیشنهاد شده اند.

#### ۳-۱۲- سنتز مدارهای کوانتومی مبتنی بر SAT {CNOT,T

یک برنامه کوانتومی به صورت یک مدار کوانتومی کلیفورد+ T مدل سازی شده است که باید به منظور مطابقت با محدودیتهای تکنولوژی

کوانتومی بهینهسازی شود. هدف اکثر الگوریتمهای بهینهسازی کاهش تعداد گیتهای T است. با این وجود، یک هدف بهینهسازی ثانویه باید به حداقل رساندن تعداد عملگرهای دو کیوبیتی (گیتهای CNOT) باشد زیرا آنها در مقایسه با عملگرهای تک کیوبیتی نرخ خطای بالاتری دارند. مقاله [۵۱] یک الگوریتم دقیق مبتنی بر SAT را برای بازنویسی مدار کوانتومی توسعه دادهاست که هدف آن کاهش گیتهای CNOT بدون افزایش تعداد گیتهای T است. این الگوریتم، حداقل اندازه مدار پیدا می کند. آزمایشها کاهش T است. این الگوریتم، مدارهای کوانتومی با تعداد پیدا می کند. آزمایشها کاهش TONOT در مدارهای کوانتومی با تعداد ترای همه گیتهای تک هدفی که توابع کنترلی آنها یکی از نمایندگان کلاسهای همارزی طیفی ۴۸ تایی از توابع بولی با پنج ورودی هستند، تر کیب می کند. آزمایشهای این مقاله کاهش متوسط تعداد CNOT

۳–۱۳– الگوریتم ملاقات در وسط برای سنتز سریع مدارهای کوانتومی با عمق بهینه

مقاله [۵۲]، الگوریتمی را برای محاسبه تجزیه با عمق بهینه برای عملگرهای منطقی ارائه می کند، و از یک تکنیک ملاقات در وسط<sup>۹۲</sup> برای ارائه سرعت قابل توجهی نسبت به الگوریتمهای جستجوی ناآگاهانه ساده استفاده می کند. بهعنوان مثال، این الگوریتم عوامل عملگرهای منطقی کوانتومی متداول را در گیتهای ابتدایی در مجموعه کلیفورد و T به دست آورده است. به طور خاص، این روش تجزیه گیت تافولی را بر روی مجموعهای از گیتهای کلیفورد و T گزارش می کند. این تجزیه، به یک مقدار عمق کل T برابر با ۳ دست می یابد، در نتیجه کاهش ۴۰ درصدی نسبت به تجزیه شناخته شده قبلی برای گیت تافولی ایجاد می کند. با توجه به اندازه فضای جستجو، این الگوریتم فقط برای پارامترهای کوچک مانند تعداد کیوبیتها و تعداد گیتها برای اجرای بهینه عملی است.

## ۴- مرور کلی بر سنتزهای مختلف منطقی مبتنی بر روشهای ریاضی

در جدول (۱) خلاصهای از روشهای مختلف از الگوریتمهای میتنی بر ریاضی و سنتز منطقی با قابلیت تحمل پذیری اشکال در مدارهای کوانتومی بررسی شدهاند.

در اکثر مقالههایی که مورد بررسی قرار گرفتهاند، از معیارهای ارزیابی تعداد CNOT و تعداد گیتهای تککیوبیتی برای یافتن مدار بهینه کوانتومی استفاده شده است.

در سنتزهایی که به دلیل قابلیت تحمل پذیری اشکال از کتابخانه CTL استفاده کردهاند، مهمترین هدف کاهش تعداد گیت *T* و عمق *T* است.

#### ۵- جمعبندی و پیشنهادهایی برای کارهای آتی

در این مطالعه، ابتدا مقدمهای بر محاسبات کوانتومی بیان شد. سپس، مقدمههای بر مفاهیم اولیه محاسبات کوانتومی مطرح شد. بعد از آن، مسئله سنتز منطقی مدارهای کوانتومی مورد بررسی قرار گرفت. هر کوانتومی به فرایند تبدیل یک گیت کوانتومی است. سنتز مدارهای پایه اطلاق میشود و یک مسئله سخت است. در این مطالعه، مروری بر روشهای سنتز منطقی ریاضی مدارهای کوانتومی ارائه شد. روشهای سنتز منطقی مدارهای کوانتومی به طور کلی به دو دسته روشهای کلی و روشهای آگاه از تحمل پذیری اشکال (سنتز تقریبی به کتابخانه CTL) تقسیم میشوند که در سالهای اخیر روشهای دسته دوم بیشتر



انجمن مهندسین برق و الکترونیک ایران-شاخه خراسان سال نهم/شماره ۱۷/ تابستان ۱۴۰۱

نكته قابل توجه	نوع الگوريتم	سال انتشار	مرجع
$O(\mathrm{n}^34^\mathrm{n})$ تعداد گیتهای CNOT در مرتبه	استفاده از تجزیه QR در جبر خطی	71	[71]
تعداد CNOTها به $[(1/4)(4^n - 3n - 1)]$ رسید	استفاده از Highest Lower Bound	74	[77]
تعداد CNOTها به(CNOTها به(4 <sup>n</sup> – 2 <sup>n+1</sup> ) رسید	استفاده از CSD	74	[74]
تعداد CNOTها به 2 – 2 <sup>n</sup> – <sup>1</sup> <sup>2</sup> رسید و تعداد کمتری از گیتهای تک کیوبیتی را تولید میکند.	بهبود روش CSD	۲۰۰۵	[٩]
توليد CNOT توليد (23/ <sub>48</sub> )4 <sup>n</sup> - (3/ <sub>2</sub> )2 <sup>n</sup> + <sup>4</sup> / <sub>3</sub> تعداد گيت	سنتزی مبتنی بر تجزیه CS با عنوانQSD	79	[٨]
ترکیبی از دو روشCSD و QSD	Block-Based Quantum Decomposition (BQD)	7.11	[79]
استفاده از کیوبیتهای کمکی برای عملگرهای کلیفورد و T، تعداد کل گیتهای ابتدایی این کتابخانه به کار رفته (۵(3 <sup>2<sup>n</sup>nk) (k) مؤلفه مخرج<sup>۵۵</sup> است)</sup>	طراحی یک روش سنتز دقیق با توجه به کتابخانه کلیفورد و T	۲ • ۱ ۳	[49]
از گیتهای کتابخانه کلیفورد و T استفاده کرده است و هدف اصلی تولید مدار با تعداد حداقل گیت T است.	الگوریتم Meet-in-the-Middle برای سنتز سریع مدارهای کوانتومی با عمق بهینه	۲۰۱۳	[57]
نتایج تجربی تایید میکنند که این امکان تحقق فشرده عملکرد کوانتومی مربوطه را فراهم میکند	استفاده از رویکرد سنتز خودکار، عدم تکیه بر کتابخانه گیت عمومی و استفاده از نمودارهای تصمیمگیری چندمقداری کوانتومی	7.14	[49]
فضای جستجوی بزرگتری را برای یافتن بهترین جواب ازلحاظ معیارهای مختلف سنتز مداری جستجو میکند و همچنین از ارزیابی معیار عمق مدار استفاده میکند	IBQD	7.19	[٢٧]
کاهش تعداد گیتهای T و به حداقل رساندن تعداد عملگرهای دوکیوبیتی (گیتهای CNOT)	توسعه یک الگوریتم دقیق مبتنی بر SAT را برای بازنویسی مدار کوانتومی	7.18	[۵۱]
از گیتهای کتابخانه کلیفورد و T استفاده کرده است و هدف اصلی تولید مدار با تعداد حداقل گیت T است.	بهبود روش سنتز دقیق پیشنهاد شده توسط [۴۶] در سطح جهانی و استفاده از Quantum برای Multiple-Valued Decision Diagram برای نمایش ماتریس بهصورت کارا	۲۰۲۰	[47]
هدف اصلی کاهش عمق T	سنتز منطقی مبتنی بر برنامهنویسی پویا و بهینهسازی شبکه منطقی	۲۰۲۲	[٢٨]
استفاده از معیار NNC	ارائه یک سنتز منطقی با قابلیت تحمل پذیری اشکال با استفاده از کدهای پیوسته	۲۰۲۲	[۴٨]
ایجاد تعداد $\left(rac{3}{4}4^n ight)$ گیتهای غیرکنترلی برای یک گیت ورودی n کیوبیتی و همچنین به حداقل رساندن زمان اجرای تجزیه	تکنیک تجزیه مبتنی بر QSD	5.55	[۵.]

منتشیر شیده در مدل مداری کو انتومی	ستنی بر الگوریتمهای ریاضی	مرتبط با سنتز مدارهای کو انتومی ا	حدول ١: خلاصهای از برخی مقالات

مورد تاکید و اهمیت هستند. بهعنوان یک کار آتی، پیشنهاد میشود به روشهای سنتز منطقی در مدل محاسبات کوانتومی یکطرفه پرداخته شود.

## پىنوشىتھا

15 Identity 16 Bit Flip 17 Phase Flip 1 Charles H. Benet 18 Hadamard gate 2 Paul A. Benioff 19 Phase rotation 3 David Deustch 20 Controlled-U 4 Richard P. Feyman 21 Controlled-NOT 5 Moore's Law 22 Uniformly-controlled multiqubit gate 6 Peter Shor 23 Feedback 7 Bra/Ket 24 Fan out 8 Transpose Conjugate 25 Clifford+T library 9 Inner Product 26 Logical level



10 Outer Product

Superposition
 Unitary
 Pauli

11 Qubit

Symposium on Foundations of Computer Science, 1994.

- [8] P. W. Shor, "Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer," SIAM Journal on Scientic Computing, vol. 26, 1997.
- [9] L. K. Grover, "A Fast Quantum Mechanical Algorithm for Database Search," in Proceedings of the 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing (STOC), 1996, pp. 212-219
- [10] V. V. Shende, S. S. Bullock, and I. L. Markov, "Synthesis of quantum-logic circuits," IEEE Trans. On CAD, vol. 25, no. 6, pp. 1000-1010, Jun. 2006.
- [11] V. Bergholm, J. J. Vartiainen, M. Mottonen, and M. M. Salomaa, "Quantum circuits with uniformly controlled onequbit gates," Physical Review A, vol. 71, no. 5, pp. 23-30, May 2005
- [12] A. U. Khalid, "FPGA Emulation of Quantum Circuits." Vol. MS thesis: McGill University, 2005.
- [13] D.Maslov, G. W. Dueck, D. M. Miller and C. Negrevergne. Quantum Circuit Simplification and Level Compaction." IEEE Transactions on CAD 27: 436-444, 2008
- [14] R. Wille, and R. Drechsler," BBD-Based Synthesis of reversible logic for large functions", Proceedings of the 46th Annual Design Automation Conference, Pages 270-275, July 2009
- [15] D.M. Miller, R. Wille, and R. Drechsler," Reducing reversible circuit cost by adding lines", 40th IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic, 2010
- [16] D.Maslov, and M. Saeedi, "Reversible circuit optimization via leaving the Boolean domain.", IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems 30.6, p.p 806-816,2011.
- [17] D.Maslov, G. W. Dueck, D. M. Miller, and C. Negrevergne, Quantum circuit simplification and level compaction", IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, 27(3), p.p 436-444 , 2008.
- [18] G. B. Charles. H Bennet, "Quantum Cryptography: Public Key Distribution and Coin Tossing," in Proceeding of IEEE International Conference on Computer System and Signal Processing New York, 1984, pp. 175-179.
- [19] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters, "Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels", Physical Review Letters ,vol ,70 .pp.1993 ,1895-1899
- [20] C .H .Bennett and S .J .Wiesner" ,Communication via One -and Two-Particle Operators on Einstein Podolsky-Rosen states ", Physical Review Letters, vol, 69. pp, 2881-2884. November.1992
- [21] G.Cybenko", Reducing quantum computations to elementary unitary operations ",Computing in Science and Engineering, vol ,3 .no,2 .cpp ,27-32 .Mar/.Apr2001
- [22] V .V .Shende ,I .L .Markov ,and S .S .Bullock" ,Minimal universal two-qubit quantum circuits ", Physical Review A , vol. ,69pp ,062329 -062321 Jub.2004
- [23] C. C Paige ,and M. Wei" ,History and Generality of the CS Decomposition ".Linear Algebra and Applications303- :208 326, 1994
- [24] M .Mottonen ,J .J .Vartiainen ,V .Bergholm ,and M .M. Salomaa", Quantum circuits for general multiqubit gates", Physical Review Letters ,vol ,93 .p ,130502 .Sep.2004
- [25] M.A Nielsen ,and I.L. Chuang ",Quantum Computation and Quantum Information, "Cambridge University Press.2010,
- [26] M.Saeedi , M.Arabzadeh , M.Saheb Zamani , and M.Sedighi, Block-based quantum-logic synthesis ",Quantum Information and Computation J ,.vol ,11 .no ,3 .pp ,262-277 .Mar.2011 .
- [۲۷] کوروش مرجوعی، محبوبه موشمند، مرتضی صاحبالزمانی و مهدی صدیقی، "سنتز مدارهای کوانتومی با استفاده از روش مبتنی بر بلوک بهبودیافته"، نشریه مهندسی برق و مهندسی کامپیوتر ایران، ب- مهندسی کامپیوتر، سال۱۴، شماره ۳، صفحه ۲۴۹-۲۴۸، پاییز ۱۳۹۵ [28] Häner, Thomas, and Mathias Soeken". Lowering the T-depth
- of quantum circuits via logic network optimization ".ACM Transactions on Quantum Computing.2022, 3.21-15
- [29] M .Steane" ,Error correcting codes in quantum theory ",Phys. Rev .Lett ,.vol ,77 .no ,5 .pp ,793-797 .Jul.1996
- [30] D. Bacon", Operator quantum error-correcting subsystems for self-correcting quantum memories ", Phys . Rev . A , vol, 73 .



سين برق و الكترونيك ايران-شاخه خراسان ن مهند سال نهم/شماره ۱۷/ تابستان ۱۴۰۱ ۷۶

- 27 Logical depth
- 28 Nearest Neighbor Cost
- 29 T-count
- 30 T-depth
- 31 ancillaqubit
- 32 Multi-objective Optimization Problem
- 33 Object function
- 34 Restriction
- 35 feasible region
- 36 feasible solution
- 37 Optimization variables
- 38 Quantum Key Distribution
- 39 Quantum Teleportation
- 40 Dense Coding
- 41 Technology independent synthesis
- 42 Highest Lower Bound
- 43 Cosine-Sine Decomposition
- 44 Ruler function
- 45 Quantum Shanon Decomposition
- 46 Symmetric
- 47 Level
- 48 Block-Based Quantum Decomposition
- 49 Trade-off
- 50 Improved-BQD
- 51 cut enumeration
- 52 tree balancing
- 53 exclusive sum-of-products representations
- 54 Fault-Tolerant
- 55 Approximation synthesis
- 56 Error Threshold
- 57 brute force
- 58 physical machine description
- 59 kipping table algorithm
- 60 cache table
- 61 number of primitive operations
- 62 execution cycles on the critical path
- 63 Physical Design-Aware Fault-Tolerant Quantum Circuit Synthesis
- 64 Skipping Table Algorithm
- 65 Flower's algorithm
- 66 Tree lookup structure
- 67 Skip
  - 68 Bidirectional search
  - 69 Ring
  - 70 Quantum Multiple-Valued Decision Diagram
  - 71 concatenated codes
  - 72 topological codes
  - 73 quantum accelerator
  - 74 Meet-in-the-middle
  - 75 denominator exponent

## مراجع

- [1] Gordon E Moore, Cramming more components onto integrated circuits, 1965
- [2] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, "Quantum Computation and Quantum Information," Cambridge university press, 2001.
- [3] G. Benenti, G. Casati, and G. Strini, "Principles of Quantum Compuation and Information," Basic concepts: World Scientific Publishing, vol. 1, 2004.
- [4] M. Nakahara and T. Ohmi, "Quantum Computing From Linear Algebra to Physical Realizations," Taylor & Francis, 2008.
- [5] M. Lukac, M. Perkowski, H. Goi, M. Pivtoraiko, C. H. Yu, K. Chung, H. Jee, B. J. Kim, and Y. D. Kim, "Evolutionary Approach to Quantum and Reversible Circuit Synthesis," in Artificial Intelligence Review. vol. 20, pp. 361-417, 2003.
- [8] آرزو رجایی، محبوبه هوشمند، سید عابد حسینی، "مروری بر سنتز مدارهای کوانتومی با استفاده از الگوریتیههای تکاملی"، نشریه عصر برق، دوره ۸۸ شماره ۱۵ (تابستان ۱۴۰۰) (IP.W.Shor, "Algorithms for Quantum Computation :Discrete)
- Logarithms and Factoring ",in Proceedings of the35 th Annual

🔭 ادامه از صفحه ۳۴

- [12] N. Bhusal, M. Abdelmalak, M. Kamruzzaman, and M. Benidris, "Power system resilience: Current practices, challenges, and future directions," IEEE Access, vol.8, pp.18064–18086, 2020.
- [13] J. Lu, J. Guo, Z. Jian, Y. Yang, and W. Tang, "Resilience Assessment and Its Enhancement in Tackling Adverse Impact of Ice Disasters for Power Transmission Systems," Energies, vol.11, no. 9, 2018.
- [14] H. Raoufi, V. Vahidinasab, and K. Mehran, "Power systems resilience metrics: A comprehensive review of challenges and outlook," Sustain. Switz., vol.12, no. 22, pp.1–24, 2020.
- [15] Z. Zeng, S. Du, and Y. Ding, "Resilience analysis of multistate systems with time-dependent behaviors," Appl. Math. Model., vol.90, pp.889–911, 2021.
- [16] D. K. Mishra, M. J. Ghadi, A. Azizivahed, L. Li, and J. Zhang, "A review on resilience studies in active distribution systems," Renew. Sustain. Energy Rev., vol.135, no. March 2020, 2021.
- [17] L. Das, S. Munikoti, B. Natarajan, and B. Srinivasan, "Measuring smart grid resilience: Methods, challenges and opportunities," Renew. Sustain. Energy Rev., vol.130, p.109918, 2020.
- [18] S. S. H. Toroghi and V. M. Thomas, "A framework for the resilience analysis of electric infrastructure systems including temporary generation systems," Reliab. Eng. Syst. Saf., vol.202, p.107013, 2020.
- [19] H. Sabouhi, A. Doroudi, M. Fotuh □ Firuzabad, and M. Bashiri, "Electrical Power System Resilience Assessment: A Comprehensive Approach," IEEE Syst. J., vol.14, pp.2643–2652, 2020.
- [20] "The Economic Design of a Smart Microgrid Considering the Reliability Indices Using the PSO Algorithm," kiaeee, vol.6, no. 12, pp.6–14, Aug. 2019.
- [21] "Determination of Optimal Location and Size of Distribution Substations to Reduce Cost, Losses and Improve Reliability," kiaeee, vol.7, no. 13, pp.41–51, Sep. 2020.
- [22] J. Nelson, N. G. Johnson, K. Fahy, and T. A. Hansen, "Statistical development of microgrid resilience during islanding operations," Appl. Energy, vol.279, no. July, p.115724, 2020.
- [23] A. Younesi, H. Shayeghi, P. Siano, A. Safari, and H. H. Alhelou, "Enhancing the Resilience of Operational Microgrids through a Two-Stage Scheduling Strategy Considering the Impact of Uncertainties," IEEE Access, vol.9, pp.18454–18464, 2021.
- [24] S. Mojtahedzadeh, S. Najafi Ravadanegh, and M. R. Haghifam, "Microgrid-based resilient distribution network planning for a new town," IET Renew. Power Gener., vol.15, no. 15, pp.3524–3538, 2021.
- [25] B. Venkateswaran V, D. K. Saini, and M. Sharma, "Technoeconomic hardening strategies to enhance distribution system resilience against earthquake," Reliab. Eng. Syst. Saf., vol.213, no. December 2020, p.107682, 2021.
- [26] J. Najafi, A. Anvari-Moghaddam, M. Mehrzadi, and C. L. Su, "An Efficient Framework for Improving Microgrid Resilience against Islanding with Battery Swapping Stations," IEEE Access, vol.9, pp.40008–40018, 2021.
- [27] H. Mehrjerdi, "Resilience improvement with zero load curtailment by multi-microgrid based on system of systems," IEEE Access, vol.8, pp.198494–198502, 2020.
- [28] S. A. Sedgh, M. Doostizadeh, F. Aminifar, and M. Shahidehpour, "Resilient-enhancing critical load restoration using mobile power sources with incomplete information," Sustain. Energy Grids Netw., vol.26, p.100418, 2021.
- [29] "Specializing in Lithium Batteries, Chargers, Solar Storage," Electric Car Parts Company.
- [30] R. Nourollahi, P. Salyani, K. Zare, and B. Mohammadi-Ivatloo, "Resiliency-oriented optimal scheduling of microgrids in the presence of demand response programs using a hybrid stochastic-robust optimization approach," Int. J. Electr. Power Energy Syst., vol.128, no. January, p.106723, 2021.

no ,1 .pp ,4013 34001-012 012 .Jan.2006 .

- [31] D. Forney ,M .Grassl ,S .Guha" ,Convolutional and tail-biting quantum error-correcting codes ",IEEE Trans .On Information Theory ,vol ,53 .no ,3 .pp ,865-880 .Mar.2007 .
- [32]M.Houshmand,S.Hosseini-Khayat,andM.M.Wilde, "Minimalmemory,non-catastrophic,polynomial-depth quantum convolutional encoders ",IEEE Trans.On Information Theory, vol ,59 .no ,2 .pp ,1198-1210 .Feb.2013.
- [33] V .Kliuchnikov ,D .Maslov ,and M .Mosca ", Exact synthesis of multiqubit lifford+T circuits generated by lifford and T gates", Quantum Information and Computation ,vol ,13 .no ,7-8 .pp. ,607-630Jul.2013.
- [34] C.Lin and A .Chakrabarti", FTQLS :fault-tolerant quantum logic synthesis ",IEEE Trans .On VLSI Systems ,vol ,22 .no,6 . pp ,1363 -1350 .Jun.2013 .
- [35] V. Kliuchnikov ,D. Maslov ,and M. Mosca", Fast and clifford exact synthesis of single qubit unitaries generated by clifford and T gates ",Quantum Information and Computation ,vol,13 . no.2013 ,8–7.
- [36] Y. G. Chen, J. B. Wang", Qcompiler :Quantum compilation with the CSD method ",Computer Physics Communications ,184no, 3 .pp ,853-865 .March.2013
- [37] M .Whiteny", Practical fault-tolerance for quantum circuits", Ph.D .Thesis ,University of Colifornia ,Berkeley.2009 ,
- [38] X. Zhou, D. W. Leung, I. L. Chuang, Methodology for quantum logic gate construction ", Physical Review A, vol,62. pp, 052316. October.2000
- [39] A.G. Fowler , A.M. Stephens , P. Groszkowski", Highthreshold universalquantum computation on the surface code ", Physical Review A ,vol ,80 .pp,052312-14–052312-1. November2009
- [40] A .G .Fowler", Constructing arbitrary steane code single logical qubit fault-tolerant gates ",Quantum Information and Computation, vol ,11 .no ,9-10 .pp ,873–867 .September.2011
- [41] C .Dawson and M .Nielsen", The solovay-kitaev algorithm", Quantum Information and Computation ,vol,77.no ,5.pp–793. 1996,797
- [42] V .Kliuchnikov ,D .Maslov ,and M .Mosca" ,Practical approximation of single-qubit unitaries by singlequbit quantum clifford and T circuits ",arXiv. 1212.6964:
- [43]C. C. Lin, S. Sur-Kolay, and N. K. Jha, "PAQCS: Physical Design-Aware Fault-Tolerant Quantum Circuit Synthesis", IEEE Transactions on Very Large Scale Integration (VLSI) Systems, Volume: 23, Issue: 7, July 2015
- [44] A. G. Fowler, "Constructing arbitrary steane code single logical qubit faulttolerant gates," arXiv preprint quant-ph: 0411206, 4, 2004.
- [45] J. Booth, "Quantum compiler optimizations," arXiv: 1206.3348v1, 2012.
- [46] B .Giles and P .Selinger", Exact synthesis of multiqubit lifford+T circuits ",Physical Review A, vol ,87 .no ,3 .p,032332 . .3102 .raM
- [47] Philipp Niemann, Robert Wille, and Rolf Drechsler," Advanced exact synthesis of Clifford+T circuits", Quantum Information Processing, pp.19-317, 2020.
- [48]Y. HWANG," Fault-tolerant circuit synthesis for universal fault-tolerant quantum computing",*arXiv preprint arXiv:* 2022,2206.02691.
- [49] P. Niemann, R. Wille, and R. Drechsler,"Efficient synthesis of quantum circuits implementing Clifford group operations." 2014 19th Asia and South Pacific Design Automation Conference (ASP-DAC). IEEE, 2014.
- [50] A. M. Krol, et al. "Efficient decomposition of unitary matrices in quantum circuit compilers." *Applied Sciences* 12.2. 759. 2022
- [51] G. Meuli, M. Soeken, GD. Micheli, "SAT-based {CNOT, T} quantum circuit synthesis", International Conference on Reversible Computation. Springer, Cham, p. 175-188, 2018.
- [52] M. Amy, et al.,"A meet-in-the-middle algorithm for fast synthesis of depth-optimal quantum circuits.", IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems 32.6, p.p 818-830, 2013

\*\*\*



نجمن مهندسین برق و الکترونیک ایران-شاخه خراسان <mark>۶۸</mark> س<mark>یال نهم/شماره۱۷/ تابستان ۱۴۰۱</mark>